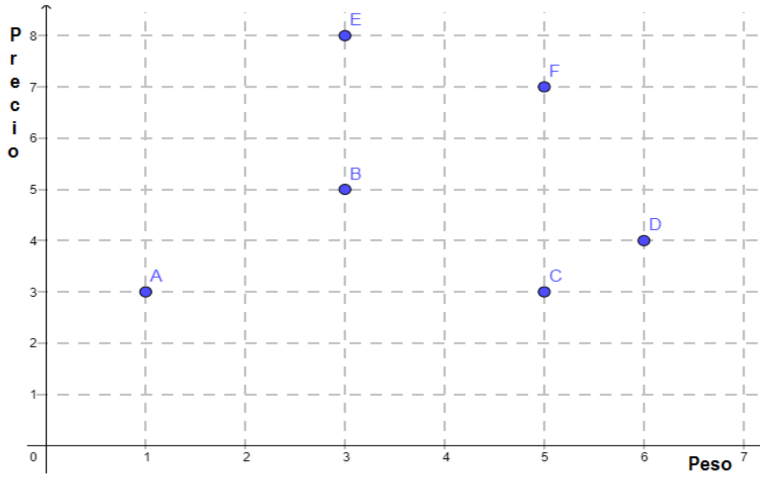
PRÁCTICO 2 Funciones

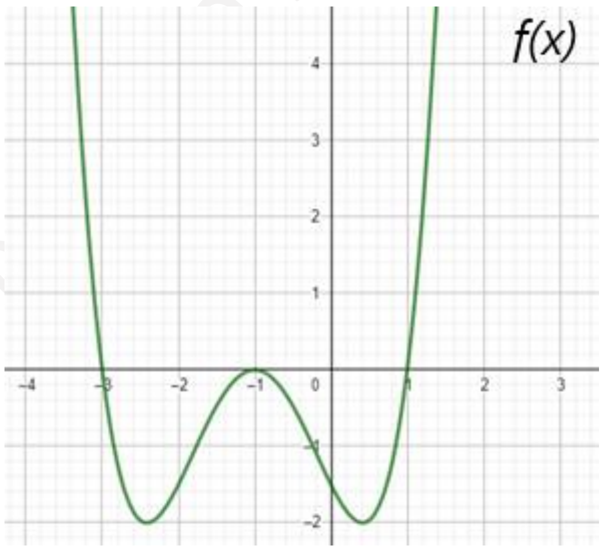
(respuestas al final)

1) En un comercio se venden distintas variedades de café que se lo empaquetan en bolsas de distinta capacidad. Los puntos en el gráfico representan el *peso* (por cada 100 g) y el *precio* (en $) de algunas bolsas, identificadas mediante los puntos A, B, C etc.



a. ¿Cuál bolsa es la que cuesta más y cuál es la que cuesta menos?
b. ¿Cuál es la bolsa de mayor peso y cuál la de menor?
c. ¿Cuáles bolsas tienen igual precio y cuáles iguales capacidad?

2) Dado el gráfico de la siguiente función:



a) ¿Cuáles son sus raíces (o sea, para que valores de x la función vale cero)?
b) Calcular los conjuntos de la imagen, del dominio, de positividad (o sea, el conjunto de valores de x donde la función es mayor que cero) y de negatividad.
c) ¿Para cuántos valores de x es $f(x) = -1$? (no es necesario decir cuales, solo cuántos)

3) Consideremos las funciones:

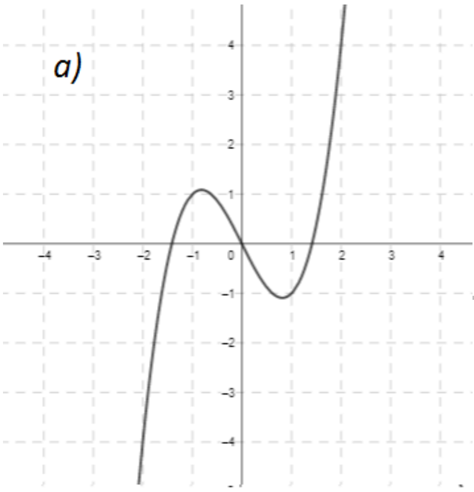
$f(x) = 4x - 12 \qquad g(x) = x^2 + 3 \qquad h(x) = \sqrt{5x} \qquad l(x) = \frac{50}{x+8}$

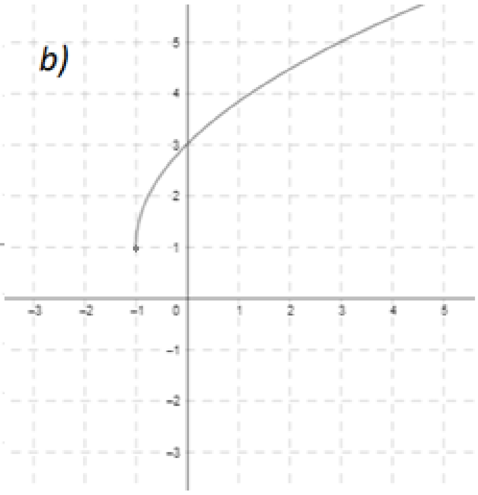
a) ¿En cuál su imagen es el conjunto formado por los números reales que son mayores o iguales a 3, o sea, el intervalo $[3;\ +\infty]$?
b) ¿En cuál el punto de coordenadas $(2;\ 5)$ forma parte del gráfico de la función?

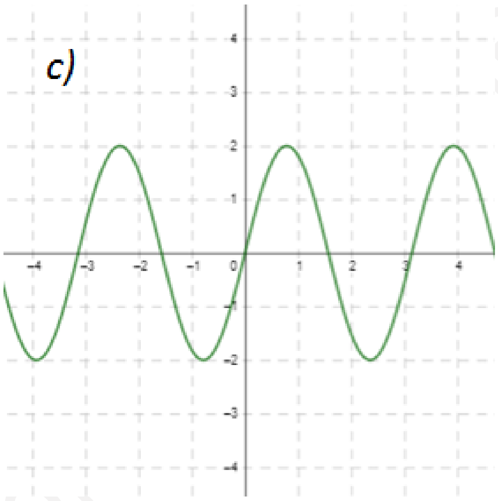
c) ¿Cuál tiene una raíz en $x = 3$?

d) ¿En cuál su dominio está formado exactamente por el conjunto $[0;\ +\infty]$?

4) Observe los siguientes gráficos de funciones y responda a las preguntas.







i. ¿Cuál posee **exactamente tres** raíces?

ii. ¿En cuál la imagen de la función **nunca** alcanza el valor 3?

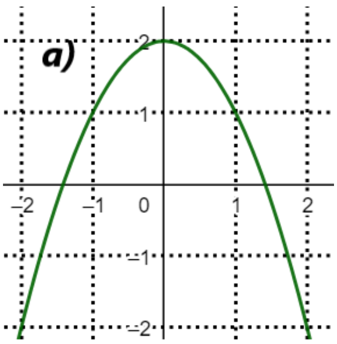
iii. ¿En cuál hay **siempre** un único valor de x para cada valor de y?

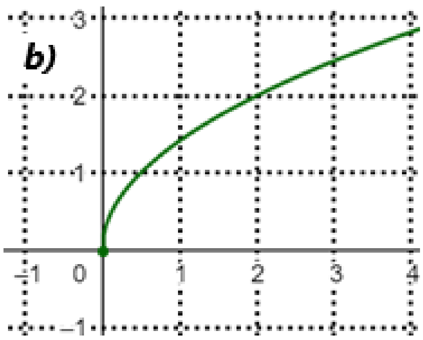
iv. ¿En cuál el punto de coordenadas $(\mathbf{2};\ \mathbf{4})$ pertenece al gráfico de la función?

v. ¿En cuál caso la función es **siempre creciente**?

vi. ¿En cuál la **imagen** coincide exactamente con el intervalo $[\mathbf{1};\ +\infty)$**?**

5) Decidir cuál es el dominio, imagen, y cuál (o cuales) los intervalos de crecimiento de las funciones cuyos gráficos son:

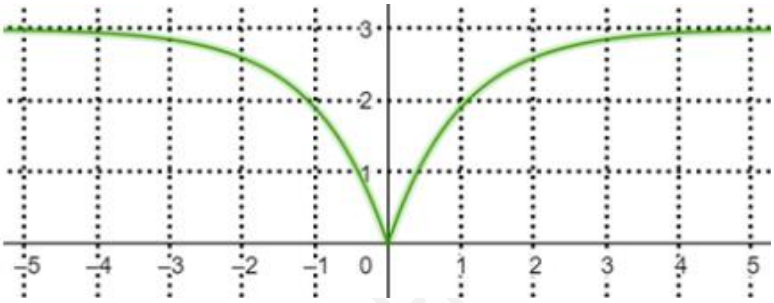




6) Complete la siguiente tabla (observe el primer ejemplo).

Función expresada mediante coloquialmente.	Función expresada algebraicamente.
Función que a cada n° le asocia su doble	$y = 2x$
Función que a cada n° le asocia su mitad más 3.	
	$y = 3x - 5$
Función que a cada n° lo relaciona con su inverso multiplicativo.	
Función que relaciona el radio "r" de una circunferencia con su perímetro P.	
	L=$\sqrt{A}$, dónde A= área de un cuadrado y L es su lado.

7) Indicar: dominio, imagen, raíces, conjunto de positividad y negatividad, crecimiento y de decrecimiento de una función cuyo gráfico es el siguiente:



8) Considere la función $\boldsymbol{f(x) = \frac{12}{x+9}}$

- **a)** ¿Cuál es el único valor de "x" en el cual **no** se puede calcular esta función y, por lo tanto, no pertenece a su dominio?
- **b)** El punto de coordenadas $(x; y) = (15\,;\,\frac{1}{2})$ ¿Se halla sobre el gráfico de la función?
- **c)** ¿Cuánto tiene que valer x para que su imagen sea igual a 2?
- **d)** ¿Es posible hallar un valor de x tal que $f(x) = 0$?

9) Dada la función exponencial $f(x) = 2^x$

- **a)** Completar la siguiente tabla: (recordemos que en matemática, elevar un número a una potencia negativa es lo mismo que elevar el inverso de ese número a la potencia positiva)

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2^x}$	**(x; y)**
-2	$2^{-2} = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$	(-2; $\frac{1}{4}$)
-1		
0		
1		
2		
3		

b) Grafique en un par de ejes cartesianos los puntos de coordenadas $(x;\ y)$, para los valores que obtuvo en la tabla. Luego una esos puntos, como para obtener una idea aproximada de cuál es el gráfico de $f(x)$.

c) A partir del gráfico obtenido responda:

i. ¿La función es creciente o decreciente?

ii. ¿Tiene alguna raíz?

iii. ¿Cuál es su dominio?

iv. ¿Cuál es su imagen?

Función lineal

10) Graficar las siguientes funciones lineales a partir de dibujar dos de sus puntos en el plano cartesiano:

a) $f_1(x) = 2x$ $b)\ f_2(x) = -2x$ $c)\ f_3(x) = 2x$+1

d) $f_4(x) = 2x - 1$ e) $f_5(x) = 1$

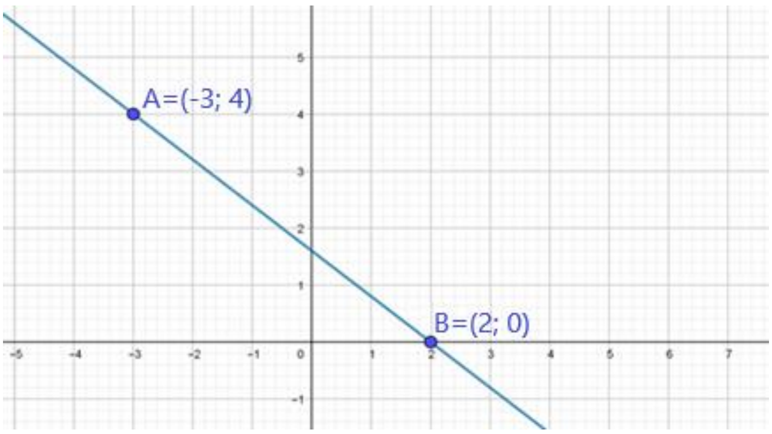
11) Considere los puntos $A = (4; 1)\ y\ B = (6; 2)$.

- **a.** Graficar la recta que pasa por ambos puntos.
- **b.** Hallar el valor de la pendiente, primero gráficamente y luego analíticamente.
- **c.** ¿La recta es creciente o decreciente?
- **d.** Indicar en el gráfico donde está ubicada la ordenada al origen.
- **e.** Escribir la ecuación de la recta.

12) Considere los puntos $A = (-1;\ 4)\ y\ B = (2;\ 1)$.

- **a.** Graficar los puntos y la recta que los contiene.
- **b.** Hallar la pendiente de la recta que pasa por ambos puntos, de manera gráfica y analíticamente.
- **c.** Hallar la ordenada al origen.
- **d.** Escribir la ecuación de la recta.
- **e.** ¿El punto $(3;\ 0)$ pertenece a la recta? Justificar.
- **f.** ¿El punto $(2;\ 4)$ pertenece a la recta? Justificar.

13) Considere el siguiente gráfico,



- **a.** Decir si la recta es creciente o decreciente.
- **b.** Obtener la ecuación $y = ax + b$ de la recta.
- **c.** Aproveche la ecuación hallada para decidir cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la recta:

$(3;\ 1)\ \ (22;\ -16)\ \ (-10;\ 20)$

d. Dar la ecuación de la recta paralela a la dada, que tenga ordenada al origen igual a 2.

14) Hallar la ecuación $y = ax + b$ de la recta de pendiente -3 que pasa por al punto de coordenadas $(5;\ 30)$. Para la recta hallada, encontrar el intervalo de valores de x para los cuales "y" es mayor que cero.

15) Halle la ecuación de la recta que contiene a los puntos de coordenadas $(-1;\ 18)$ y $(4;\ 3)$. A partir de ella,

a. calcule su raíz, o sea, el valor de x para el cual $y = 0$.
b. calcule los valores de x para los cuales es $y \geq 9$.

16) En una ciudad cada cliente debe pagar \$15 por cada hl de agua consumida. Al pagar el abono mensual debe sumarle el pago de un cargo fijo. Se sabe que a fin de mes un cliente pagó \$4.500 y consumió 60 hl.

a. Con los datos dados halle la función lineal que sirva para calcular cuánto debe pagarse por mes según la cantidad de hl consumidos.
b. Si en un mes una persona pagó \$3.750 ¿cuántos hl consumió?

17) En un pueblo la tarifa de viaje en taxi se cobra de tal manera que la bajada de bandera cuesta \$ 17 más una cantidad de pesos por cada km recorrido. Sabiendo que un cliente pagó \$ 113 por un viaje de 12 km deduzca cual es la ecuación lineal $y = ax + b$ que permite calcular el precio total a pagar por un viaje de x km.

18) En una región de la Tierra la temperatura a 1 km de altura del suelo es de 12,5° centígrados; y a 2 km de altura, de 10°.

a. Si suponemos que la relación entre la altura y la temperatura es lineal ($y = ax + b$) calcular los valores de a y de b.
b. A partir de la fórmula hallada, decida cuánto vale la temperatura a ras del suelo.
c. ¿A qué altura la temperatura será de -1 grados centígrados?

Respuestas

1)

a. La E es la más cara. La A y C son las más baratas.
b. La de mayor peso es la D, la de menor es la A.
c. En precio: A=C En peso: B=E y C=F.

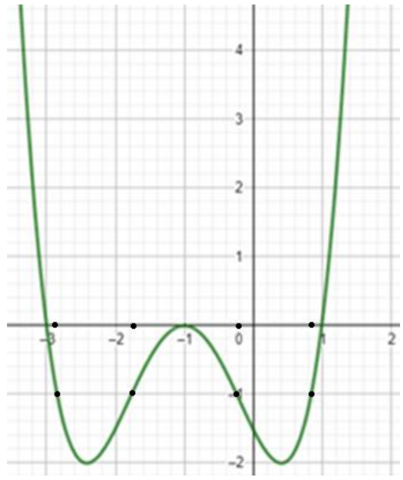
2)

a) Raíces: $x = -3;\ x = -1;\ x = 1$

b) $Imagen\ f(x) = [-2; +\infty).\ Dom\ f(x) = \mathbb{R}.$

$Positividad\,(C^{+})\ \ (-\infty; -3)\ U\ (1; +\infty)\ \ Negatividad\,(C^{-})$
$(-3; -1)\ U\ (-1; 1)$

c) Su imagen es igual a -1 para **cuatro** distintos valores de la abscisa x.



3) a) $g(x)$ b) $l(x)$ c) $f(x)$ d) $h(x)$

4) **i) a** **ii) c** **iii) b** **iv) a** **v) b** **vi) b**

5) $\boldsymbol{a})$ Dominio: $\mathbb{R}$ $(\boldsymbol{o\ sea, todos\ los\ n°\ reales})$ $\boldsymbol{Imagen} = [-\infty;\ \boldsymbol{2})$

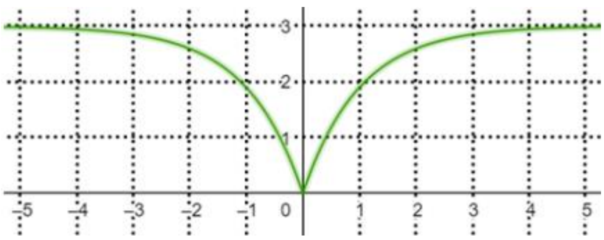
crecimiento $\boldsymbol{C}^{\uparrow} = [-\infty;\ \boldsymbol{0})$

$\boldsymbol{b})\ \boldsymbol{Dominio}: [\boldsymbol{0}\ + \infty)$ $\boldsymbol{Imagen} = [\ \boldsymbol{0};\ +\infty)$ $\boldsymbol{C}^{\uparrow} = [\ \boldsymbol{0};\ +\infty)$

6)

Función expresada mediante enunciado.	Función expresada mediante expresión algebraica.
La función que a cada n° le asocia su doble	$y = 2x$
La función que a cada n° le asocia su mitad más 3.	$y = \frac{1}{2}x + 3$
La función que a cada n° le asocia su triple menos 5.	$y = 3x - 5$
La función que a cada n° lo relaciona con su inverso multiplicativo.	$y = \frac{1}{x}$
La función que relaciona el radio “r” de una circunferencia con su perímetro P.	$P(r) = 2\pi r$
La función que relaciona el área de un cuadrado con la longitud “L” de su lado.	L=$\sqrt{A}$, dónde A= área de un cuadrado.

7)



$\boldsymbol{Dominio}: \boldsymbol{todos\ los\ reales, o\ sea\ el\ conjunto}\ \mathbb{R}.$ $\boldsymbol{Imagen} = [\ \boldsymbol{0};\ \boldsymbol{3})$

$\boldsymbol{Raíces}\ \ \boldsymbol{C}^{\boldsymbol{0}} = \boldsymbol{0}$

$\boldsymbol{C}^{+} = \mathbb{R}$

$\boldsymbol{C}^{-} = \boldsymbol{vacío}\ (\boldsymbol{que\ se\ simboliza\ como}: \varnothing)$

$\boldsymbol{C}^{\uparrow} = [\ \boldsymbol{0};\ +\infty)$

$\boldsymbol{C^{\downarrow} = (-\infty; 0)}$

8)

a) Recordemos que el "dominio" de una función son los valores de "x" para los cuales se puede calcular $f(x)$. La cuenta $\frac{12}{x+9}$ no puede realizarse si $x = -9$, pues en tal caso se anula el denominador y dividir por cero es una operación **no** válida. Por lo tanto, el dominio son todos los reales **distintos** de $x = -9$.

b) Qué un punto de coordenadas $(x;\ y)$ esté sobre el gráfico quiere decir que debe cumplirse que $f(x) = y$. En este caso $(x;\ y) = (15\ ;\ \frac{1}{2})$, y como en efecto $f(15) = \frac{12}{15+9} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}$, quiere decir que el punto pertenece al gráfico.

c) si $f(x) = 2$ quiere decir que $\frac{12}{x+9} = 2$. Entonces, hallamos "x" despejando de la ecuación:

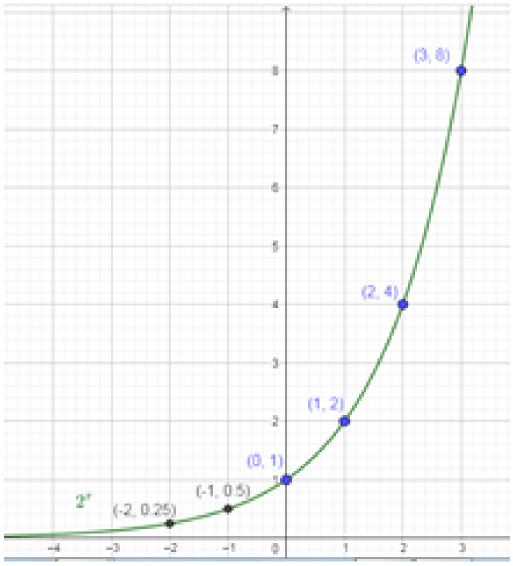
$$\frac{12}{x+9} = 2 \leftrightarrow 12 = 2\,(x+9) \leftrightarrow$$
$$12 = 2x + 18 \leftrightarrow 12 - 18 = 2x \leftrightarrow$$
$$-6 = 2x \leftrightarrow \frac{-6}{2} = x \leftrightarrow \boldsymbol{-3 = x}$$

d) No, no es posible, pues al intentarlo vemos que para lograr que $f(x) = 0$ debe ser $\frac{12}{x+9} = 0$ o sea, $12 = 0 \cdot (x+9)$ lo que nos llevaría al absurdo de que $12 = 0$.

9) a.

$\boldsymbol{x}$	$\boldsymbol{y = 2^x}$
-2	$\frac{1}{4} = 0{,}25$
-1	$\frac{1}{2} = 0{,}5$
0	1
1	2
2	4
3	8

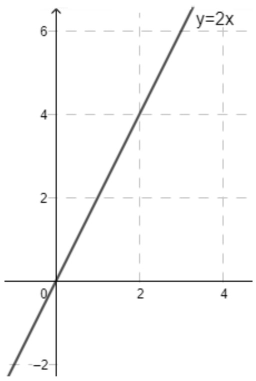
b.



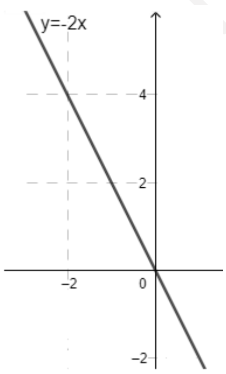
c.

i. Creciente
ii. No tiene raíces.
iii. Todos los reales.
iv. Todos los reales positivos, o sea, los $y > 0$, ó, escrito como intervalo, los y dentro del intervalo $(0;\ +\infty)$

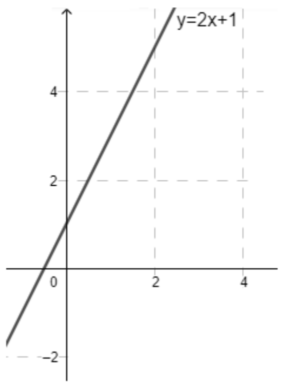
10) a.



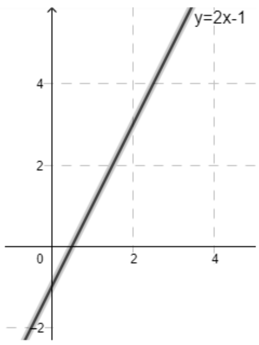
b.



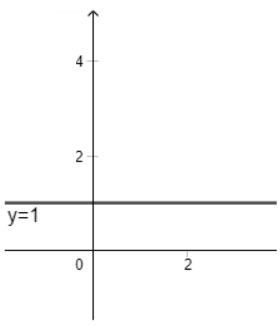
c.



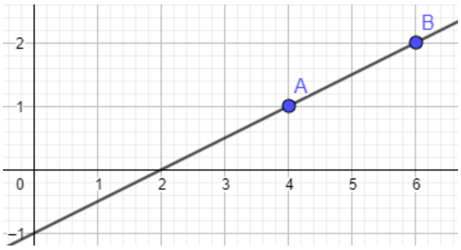
d.



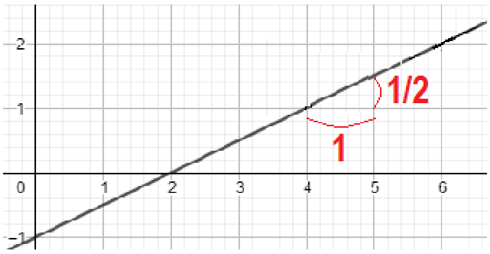
e.



11) a.



b. Gráficamente: nos movemos desde un punto cualquiera sobre la recta una unidad hacia la derecha, y luego nos movemos hacia arriba hasta alcanzar la recta. Vemos que para lograrlo hay que moverse media unidad, entonces la pendiente es $\frac{1}{2}$

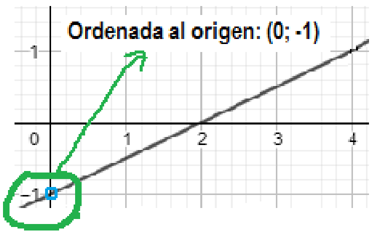


Analíticamente: $A = (x_A;\ y_{A)} = (4; 1)$ $\quad B = (x_B;\ y_{B)} = (6; 2)$. Entonces la pendiente es:

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{1-2}{4-6} = \frac{-1}{-2} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$

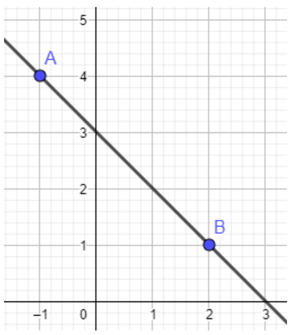
c. La recta es creciente, su pendiente es positiva, a mayor valor de x mayor será el valor de y.

d. La ordenada al origen es donde la recta corta al eje y. Esto ocurre en $\boldsymbol{y = -1}$.

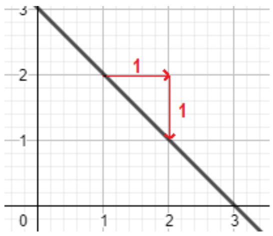


e) $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 1}$

12) a.



b. Gráficamente: desde un punto cualquiera de la recta nos movemos una unidad a la derecha. Luego nos movemos en vertical hacia abajo para hallar la recta. Como al bajar necesitamos recorrer exactamente una unidad para llegar al gráfico de la recta quiere decir que la es de pendiente negativa (porque es necesario bajar, y no subir, para llegar a la recta) y vale -1.



Analíticamente: $A = (x_A;\ y_{A)} = \ (-1; 4)$ $\quad B = (x_B;\ y_{B)} = \ (2; 1)$. Entonces la pendiente es:

$$\frac{y_A - y_B}{x_A - x_B} = \frac{4-1}{-1-2} = \frac{3}{-3} = -\mathbf{1}$$

c. La ordenada al origen vale 3, por ser donde la recta corta al eje y

d. $y = -x + 3$

e. Sí, el $(3; 0)$ pertence a la recta pues $0 = -3 + 3$

f. No, el $(2; 4)$ no pertence a la recta pues $4 \neq -2 + 3 = 1$

13)

a. Es decreciente

b. $\boldsymbol{y = -\frac{4}{5}x + \frac{8}{5}}$

c. $(3;\ 1)$ no pertenece, se puede ver gráfica o analíticamente: $y = -\frac{4}{5}3 + \frac{8}{5} = -\frac{4}{5} \neq 1$

$(22;\ -16)$ pertenece, pues $y = -\frac{4}{5}22 + \frac{8}{5} = -\frac{88}{5} + \frac{8}{5} = \frac{-80}{5} = -16$

$(-10;\ 20)$ no pertenece, pues $y = -\frac{4}{5}(-10) + \frac{8}{5} = \frac{40}{5} + \frac{8}{5} = \frac{48}{5} \neq 20$

d. $\boldsymbol{y = -\frac{4}{5}x + 2}$ (la misma pendiente, pero de ordenada 2)

14) Igualamos $-3 \cdot 5 + b = \ 30 \ \Leftrightarrow b = 45 \quad \boldsymbol{y = -3x + 45}$

Será $y > 0$ si $-3x + 45 > 0$ o sea si $-3x + 45 > 0 \Leftrightarrow -3x > -45 \Leftrightarrow x < 15,$

o sea, el intervalo $(-\infty\ ;\ \mathbf{15})$

15) La recta es $\boldsymbol{y \ = \ -3x + 15}$

a. La raíz es el valor de abscisa x para el cual $y = 0$, o sea, cuando -$3x + 15 = 0$, o sea $\boldsymbol{x = 5}.$

b. $-3x + 15 \geq 9 \Leftrightarrow -3x \geq -6 \Leftrightarrow \boldsymbol{x \leq 2.}$

16) a) $\boldsymbol{y = \ 15\,x \ + \ 3600}$ b) $\boldsymbol{10\ hl}$

17) Según la información dada: $113 = a \cdot 12 + 17$. Despejando obtenemos $a = 8$.

Por lo tanto $\boldsymbol{y = \ 8\,x \ + \ 17}$

18)

- **a.** $a = -2{,}5 \quad b = 15$
- **b.** Para $x = 0$ es $y = 15$
- **c.** Para que $y = -1$; debe ser $-1 = -2{,}5x + 15$, despejando queda: $x = \frac{16}{2{,}5} = 6{,}4$