Matemática y Estadística
Teórico

Unidad 2

Funciones numéricas.

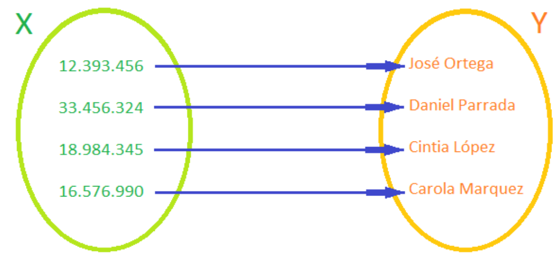
Representación gráfica y analítica de la relación entre dos variables numéricas. Funciones numéricas sencillas, interpretación. Función lineal, cálculo, representación gráfica e interpretación.

Roberto Fiadone

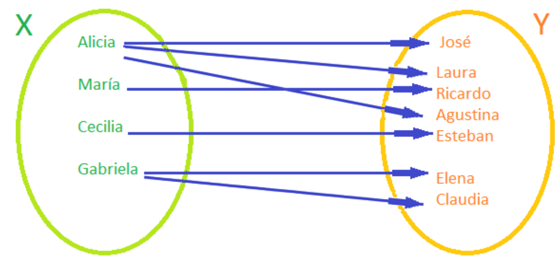
Funciones

Consideremos el siguiente par de ejemplos de relaciones entre conjuntos:

* Número de DNI y nombre de una persona (relacionamos un número natural con un nombre)



* Nombre de madres con los nombres de sus hijos (relacionamos nombres de personas con uno o más personas, según tengan uno o más hijos).



En la **primera** relación, a cada elemento del conjunto de ***partida*** (al que generalmente denominaremos "X") le corresponde **un único** elemento del conjunto de **llegada** (que denominaremos Y), pues no existen dos personas que coincidan en su n° de DNI. Dicho de otra manera: a cada elemento "x" del conjunto X le corresponde un único elemento "y" del conjunto Y.

En la **segunda**, los elementos del conjunto de partida pueden llegar a relacionarse con más de un elemento del conjunto de llegada, pues una madre puede tener más de un hijo, y así vemos, por ejemplo, que "Alicia" tiene tres hijos: José, Laura y Ricardo. Quiere decir que al elemento "$x = Alicia$" le corresponden tres elementos "y".

Cuando en una relación entre dos conjuntos se cumple, como en el **primer** ejemplo, que **cada elemento del conjunto de partida X** se relaciona **con solo un único elemento del conjunto de llegada**, decimos que esa relación es una "**función**". En cambio, no podemos decir lo mismo del segundo ejemplo, pues hay elementos del primer conjunto que se correspondieron **con más de un elemento del segundo.**

Función: es toda relación entre dos conjuntos, "X" (partida) e "Y" (llegada), que hace corresponder a cada elemento *x* del conjunto X un único elemento (o ninguno) *y* del segundo conjunto Y.

Funciones numéricas

En esta materia vamos a trabajar solo con funciones donde tanto el conjunto de partida X como el de llegada Y serán conjuntos de números reales ($\mathbb{R}$). Dicho de otra manera, a cada número real "x" lo relacionaremos con, a lo sumo, un único número real "y". Serán, por lo tanto, lo que se llama "funciones numéricas".

Un ejemplo sencillo podría ser relacionar a cada número real "x" con un número "y" por medio de la relación "el doble de x" (x➔2x). Así, por ejemplo,

al 3 le corresponderá el 2·3=6

al 5 el 2·5=10

al 1,3 el 2,6

al 1/5 el 2/5

etc.

De esta manera, a cada número real cualquiera lo estamos relacionando con un único número real. La relación "el doble de x" es entonces un ejemplo de función numérica.

O podríamos relacionar a cada número real "x" con "el número x elevado al cuadrado" (x➔$y=x^2$). Así, por ejemplo,

al -2 le corresponderá el $(-2)^2=4$

al 0 el $0^2=0$,

al 1,1 el $(1,1)^2=1,21$

al 2 el 4,

al ½ el $(1/2)^2=1/4$

etc.

Una vez más, a cada número real le corresponde otro único número real. Así que la relación "el cuadrado de x" es una función numérica.

Por lo general, denotamos una función numérica indicando su nombre con una letra (la mayoría de las veces la "f", y sino "g", "h", etc) seguida de la letra x entre paréntesis. Es decir, la notación

$$f(x) = y$$

se lee como

$$al\ valor\ x\ le\ corresponde, según\ la\ función\ "f", el\ valor\ "y"$$

Veámoslo con un caso concreto, retomemos el último ejemplo, el de "relacionar un número real con su cuadrado", podemos escribir simbólicamente que:

$$f(x) = x^2$$

Que podemos interpretar como que: "*a cada valor x lo relacionamos con un valor y que se obtiene de calcular x^2*", es decir,

$f(x) = x^2 = y$ ("*el valor de y se obtiene elevando x al cuadrado*").

Y así, si escribimos $f(3)$, nos estamos refiriendo al elemento "y" que se relaciona con el elemento "3" a través de la función dada por $f(x) = x^2$:

$$f(3) = 3^2 = 9 = y$$

O sea, para $x = 3$, es $y = 9$.

Al valor "9" obtenido a partir de calcular $f(3)$ se lo llama la ***imagen*** de 3.

Notemos, por ejemplo, que también el "9" es la imagen de -3, pues:

$$f(-3) = (-3)^2 = 9$$

¿Existe algún valor de x que tenga por imagen a un número negativo? Simbólicamente:

$$¿\,Existe\ x\ tal\ que\ f(x) < 0?$$

La respuesta es no, pues siempre que elevemos al cuadrado un número cualquiera este será mayor o igual que cero (para todo x es $f(x) = x^2 \geq 0$). Podemos decir entonces que el **conjunto imagen** de la función f es el conjunto de los reales mayores o iguales a cero. Escribimos:

$$\boldsymbol{Imagen\ f(x) = 0 \leq x = [0; +\infty)}$$

Dada una función $f(x)$ llamamos **imagen** de "x", al elemento "y" que se obtiene al calcular $f(x)$.

Al conjunto de todos los elementos que se obtienen de calcular $y = f(x)$ lo llamamos $\boldsymbol{Imagen\ f(x).}$

Volviendo al ejemplo ¿Cuál valor de x tiene por imagen al cero? Es decir, simbólicamente, nos estamos preguntando cual valor de x cumple que $f(x) = 0$. O sea que

$$x^2 = 0$$

Y la respuesta es que existe un único valor que cumple eso, que es $x = 0$, pues $0^2 = 0$

A los valores de x que cumplan que $f(x) = 0$ se los llama las "**raíces**" de la función.

Por ejemplo, la función $f(x) = 4x - 10$ tiene una única raíz, que es el número $x = 2{,}5$, pues $f(2{,}5) = 4 \cdot 2{,}5 - 10 = 10 - 10 = 0$

Representación gráfica de una función

Convencionalmente a las funciones numéricas se las representan gráficamente en el llamado "**plano cartesiano**". Este tipo de representación nos permite analizar más fácilmente las características de una función.

Vamos entonces a recordar que son y como se utilizan los "ejes cartesianos" para representar puntos y luego veremos cómo representar funciones en ellos.

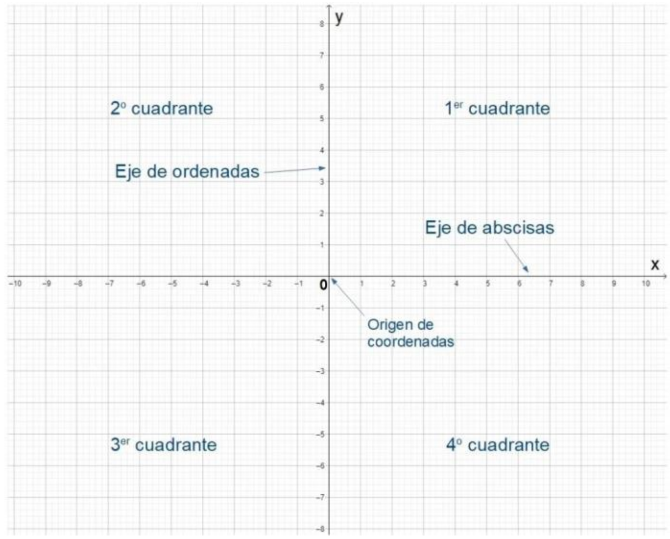
El **plano cartesiano** está formado por dos rectas numéricas perpendiculares, una horizontal y otra vertical que se cortan en un punto.

La denominación de «cartesiano» se introdujo en honor al matemático y filósofo francés René Descartes, (1596-1650) que fue quien utilizó este sistema por primera vez de manera formal. (En latín, "Descartes" se lee "Cartesius", de ahí ese nombre).

El eje horizontal o "eje X" se llama eje de las **abscisas**, y el eje vertical o "eje Y" se lo llama eje de las **ordenadas**.

Al punto en que se cortan ambos ejes se lo denomina **origen de coordenadas.**

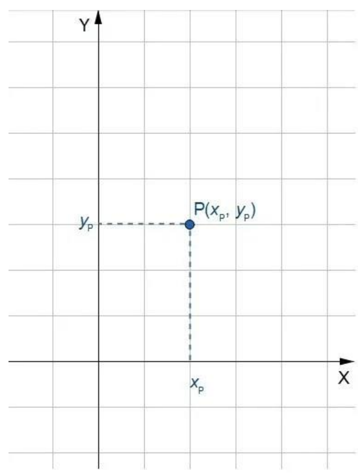
Los ejes cartesianos dividen al plano en cuatro regiones o cuadrantes:



En el eje X los valores positivos están desde el origen de coordenadas hacia la derecha, y los valores negativos desde el origen de coordenadas hacia la izquierda.

En el eje Y los valores positivos están desde el origen de coordenadas hacia arriba, y los negativos desde el origen de coordenadas hacia abajo.

<u>Coordenadas cartesianas de un punto del plano</u>: Las coordenadas cartesianas de un punto P del plano son un par ordenado de números $(x_p; y_p)$ que indican la posición de dicho punto respecto de los ejes de coordenadas.



La primera coordenada x_p, es la abscisa del punto o coordenada x del punto, y se mide sobre el eje X. Es la proyección perpendicular del punto sobre el eje X.

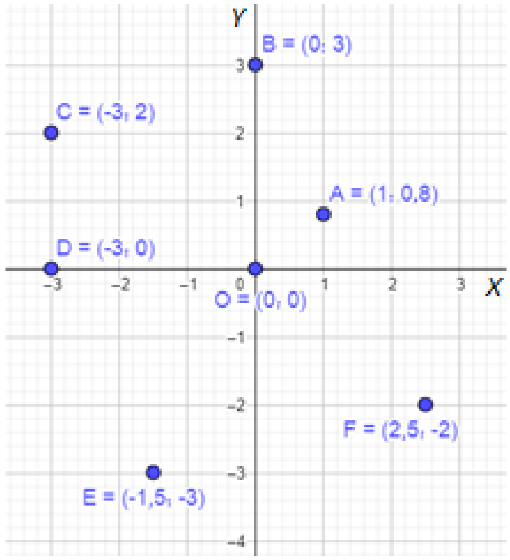
La segunda coordenada y_p, es la ordenada del punto o coordenada y del punto, y se mide sobre el eje Y. Es la proyección perpendicular del punto sobre el eje Y.

Por ejemplo, los puntos:

$$A = (1; 0{,}8) \;\; B = (0; 3) \;\; C = (-3; 2) \;\; D = (-3; 0)$$

$$E = (-1{,}5; -3) \;\;\; F = (2{,}5; -2) \;\; O = (0; 0)$$

Están representados de la siguiente manera



Los puntos que están en el eje de abscisas (eje X) tienen su ordenada x_p igual a cero. Y los puntos que están en el eje de ordenadas (eje Y) tienen su abscisa y_p igual a cero.

Veamos ahora como representar e interpretar el **gráfico de una función**.

Por ejemplo, supongamos representar la relación entre los kilómetros (km) recorridos por un auto y su consumo en litros de combustible. El valor de la variable "combustible" depende de los km recorridos. La variable "litros consumidos" será entonces nuestra variable "y", que dependerá de la variable x=kilómetros recorridos. Vamos a suponer que la relación entre una y otra viene dada por la fórmula:

$$y = 0{,}08 \cdot x \qquad (x \geq 0)$$

(por cada km recorrido, se gastan $0{,}08$ litros de combustible)

O sea, nuestra función es $f(x) = 0{,}08 \cdot x \quad x \geq 0$

¿Esta fórmula, tiene sentido para cualquier valor de x?

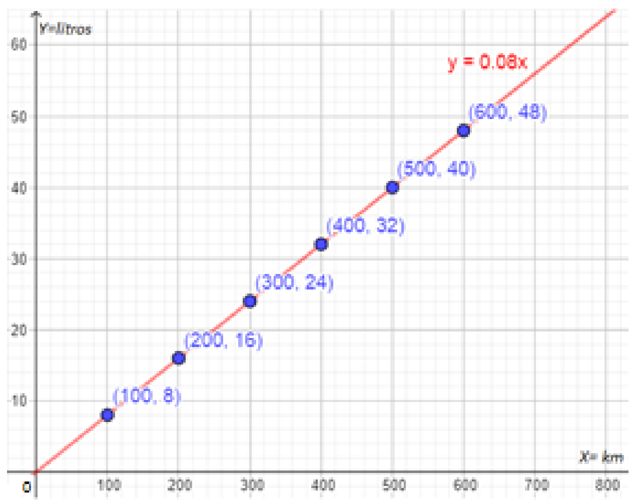
N**o,** pues si bien matemáticamente para, por ejemplo, $x = -50$ es $y = 0{,}08 \cdot (-50) = -4$, es absurdo hablar de kilómetros "negativos". Es decir, se entiende que la fórmula tiene sentido solo si $x \geq 0$. Decimos entonces que el **dominio** de la función son los valores de $x \geq 0$.

En general, llamamos "**dominio**" de una función al conjunto de valores de x para los cuales tiene sentido (físico o matemático) calcular la función.

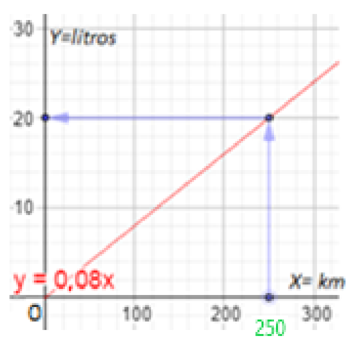
Generemos ahora una tabla que, para algunos valores de x, nos indique cual es el valor de y correspondiente,

x	$y = f(x) = 0{,}08x$
100	$0{,}08 \cdot 100 = 8$
200	16
300	24
400	32
500	40
600	48

Los valores que toman ambas variables pueden representarse en una gráfica. En el eje de abscisas x representamos la distancia recorrida en km y en el eje de ordenadas el consumo en litros de combustible. (NOTA: para que el gráfico sea más legible, vamos a usar en el eje x una escala diferente a la del eje y). Y luego, unimos esos puntos,



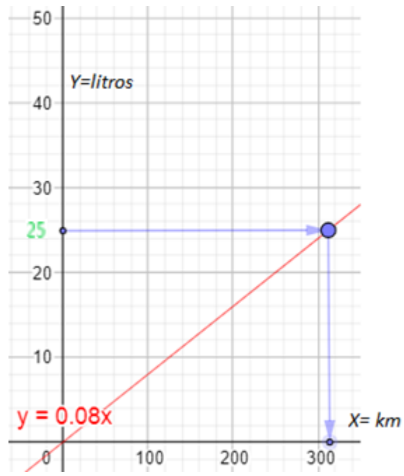
La gráfica facilita el estudio de la relación que hay entre las 2 variables. Observamos claramente la relación linealmente creciente entre los km recorridos y el consumo en litros de combustible. Podemos además visualizar fácilmente cuántos litros gastaremos si recorriésemos, por ejemplo, 250 km: basta con extender una línea vertical desde x= 250 hasta la gráfica de la recta; y desde este último punto movernos horizontalmente hacia el eje y:



Si nos guiamos por el gráfico, pareciera que para $x = 250$ el valor de y (la "imagen") correspondiente es de 20. ¿Cómo lo habríamos hallado en forma analítica? Para eso recurrimos a nuestra función, y nos planteamos calcular cuánto vale y si $x = 250$,

$$f(250) = 0{,}08 \cdot 250 = \mathbf{20}$$

O al revés: averiguar, mirando el gráfico, cuántos kilómetros podemos hacer con 25 litros: nos basta con extender una línea horizontal desde $y = 25$ hasta la gráfica de la línea y desde este último punto hacia abajo al eje x:



Si nos guiamos por el gráfico, pareciera que para $y = 25$ el valor de x correspondiente es aproximadamente de 315. ¿Cómo lo habríamos hallado en forma analítica? Para eso recurrimos a nuestra función, y nos planteamos hallar el valor de x talque $y = 25$,

$$f(x) = 25$$

$$0{,}08 \cdot x = 25$$

Despejamos la x de esta ecuación sencilla y obtenemos el valor exacto:

$$x = \frac{25}{0{,}08} = 312{,}5$$

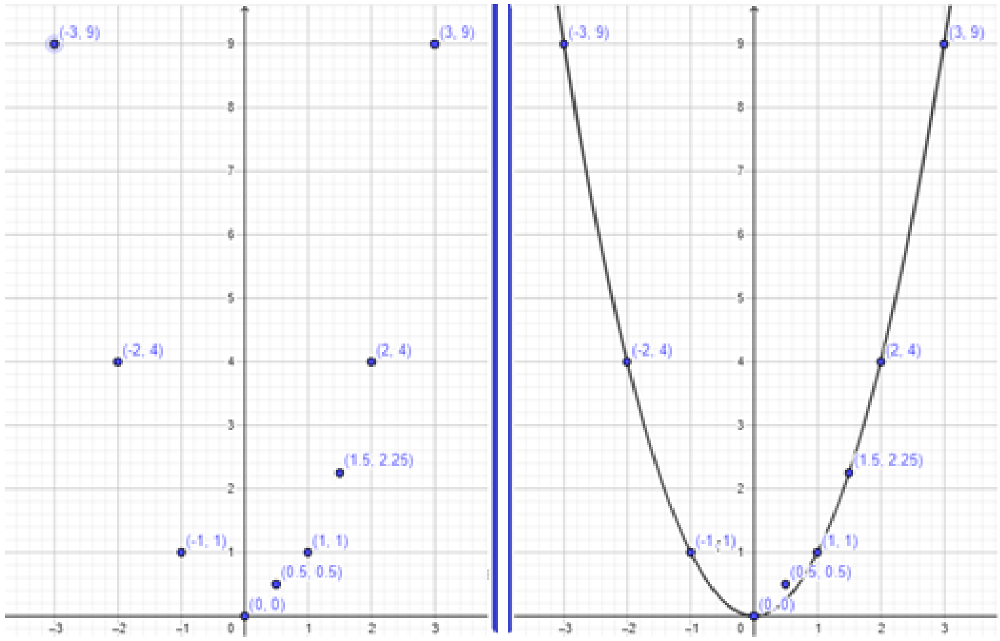
Es decir, obtuvimos que con 25 litros podemos recorrer 312,5 km, que es casi lo que en forma aproximada habíamos obtenido gráficamente.

Veamos otra representación gráfica: volvamos al ejemplo de la función $f(x) = x^2$

Hagamos una tabla con algunos valores arbitrarios (preferiblemente cerca del cero) de x:

x	$y = f(x) = x^2$
-3	$(-3)^2 = 9$
-1	1
0	0
1/2	1/4
1	1
3/2	9/4
2	4
3	9

Si representamos en el plano cartesiano, obtenemos:



¿Cuál sería el dominio de esta función? La función puede calcularse para cualquier valor de x, por lo tanto, $\boldsymbol{Dominio}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \mathbb{R}$

Podemos visualizar en el gráfico que la curva se encuentra por encima del eje x, o sea, no vemos que haya ningún punto cuya coordenada y sea negativa. Es que tal como habíamos comentado antes $f(x) = x^2 \geq 0$. O sea, que siempre $y \geq 0$. Por lo tanto, la imagen de esta función es:

$$\boldsymbol{Imagen}\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = [\mathbf{0};\ +\infty)$$

El **gráfico** de una función f está formado por todos los puntos del plano que cumplen que

$$(x, y) = \big(x, f(x)\big)$$

La primera variable x representa valores del conjunto del $Dominio\ de\ f$, el cual se visualiza en el eje de las abscisas (eje X) mientras que su respectiva imagen $y = f(x)$ se visualiza en el eje de las ordenadas (eje Y)

Algunos otros ejemplos sencillos e ilustrativos de funciones matemáticas.

* Relación entre el área de un círculo y su radio: el área de un círculo es función de su radio, ya que, si varía el radio, también variará el área. Se puede probar que si "r" es el área de un círculo entonces su área "A" está dada por la fórmula πr^2. Con la notación que usamos hasta ahora podemos escribir:

$$A(r) = \pi r^2$$

"A" es el nombre de la función, "r" juega el papel de la variable independiente "x", en nuestra notación podríamos haber escrito también:

$$f(x) = \pi x^2$$

Así, por ejemplo, la expresión: $A(5)$, significa "área de un círculo de radio 5", y la respuesta sería que,

$$A(5) = \pi 5^2 = \pi \cdot 25 \approx 3{,}14 \cdot 25 = 78{,}5$$

* Supongamos que la construcción de una muro requiere una cantidad de tiempo para realizarse que depende de la cantidad de obreros que se dediquen a la tarea. Dicho tiempo, en días, está dado por la fórmula:

$$g(x) = \frac{20}{x}$$

Donde $x = cantidad\ de\ obreros\ empleados\ en\ la\ construcción.$

Si, por ejemplo, se emplean 5 obreros, se tarda

$$g(5) = \frac{20}{5} = 4\ días$$

Pero si se emplean 10 obreros, se tarda

$$g(10) = \frac{20}{10} = 2\ día$$

¿Cuánto obreros se necesitan para construir el muro en 5 días?

Busco x tal que $g(x) = 5$, o sea,

$$\frac{20}{x} = 5 \iff 20 = 5 \cdot x \iff \frac{20}{5} = x \quad \iff 4\ obreros = x$$

* Se le llama "**función exponencial**" a toda función de la forma

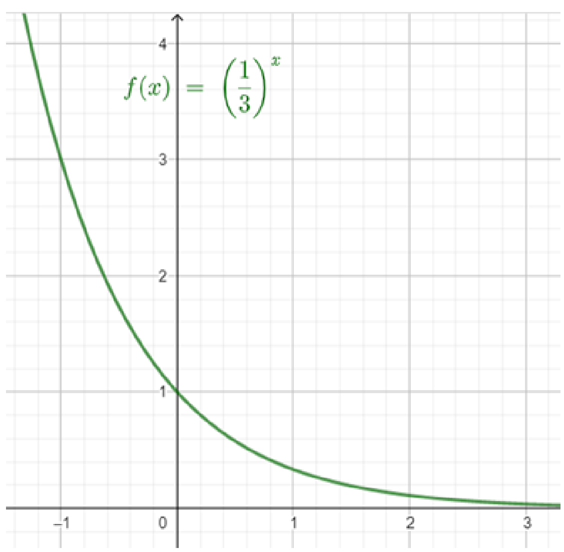
$$\boldsymbol{f(x) = k \cdot a^x}$$

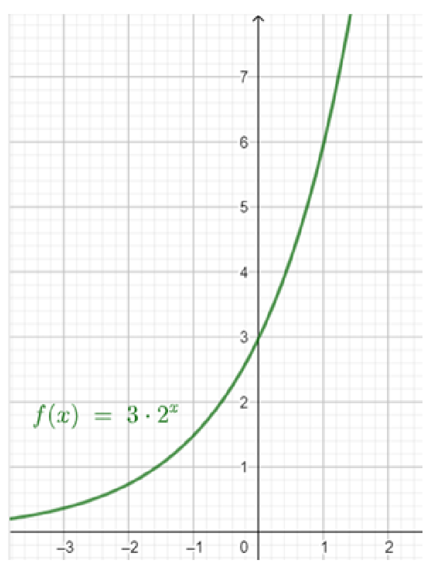
donde a es lo que se llama "**la base**", y siempre será un número **mayor** que cero y diferente de 1, y "k" es una constante cualquiera. Así, por ejemplo:

$$3 \cdot 2^x \;\; ; \;\; 10^x \; ; \;\; 4\left(\frac{5}{3}\right)^x \;\; ; \;\; 7(0{,}2)^x \; ; \; \left(\frac{1}{3}\right)^x$$

Son todas funciones exponenciales, con bases 2, 10, $\frac{5}{3}$, 0,2 y $\frac{1}{2}$ respectivamente.

Si su base cumple que $a > 1$, entonces su gráfica tiene comportamiento *creciente* en todo su dominio. Si en cambio, $0 < a < 1$, entonces su gráfica tiene comportamiento de*creciente* en todo su dominio. Así, por ejemplo, vemos en los siguientes gráficos que la función exponencial $3 \cdot 2^x$ es creciente pues su base, $a = 2$, es mayor que uno, y en cambio $\left(\frac{1}{3}\right)^x$ es decreciente pues su base, $a = \frac{1}{3}$, es menor que uno.





Veamos un ejemplo de aplicación de función exponencial:

Según los cálculos relacionados con la cantidad de nacimientos y muertes en la Argentina durante el año 2021, el crecimiento natural se su población es del 9,31 por mil, o sea, la población aumenta un 0,93% cada año. Esto puede expresarse mediante esta función:

$$P(t) = n° \ de \ habitantes \ transcurridos \ t \ años \ desde \ 2021$$

$$P(t) = 45.808.747 \cdot (1{,}0093)^t$$

$$(\text{acá } a = \ 1{,}0093; k = \ 45.808.747)$$

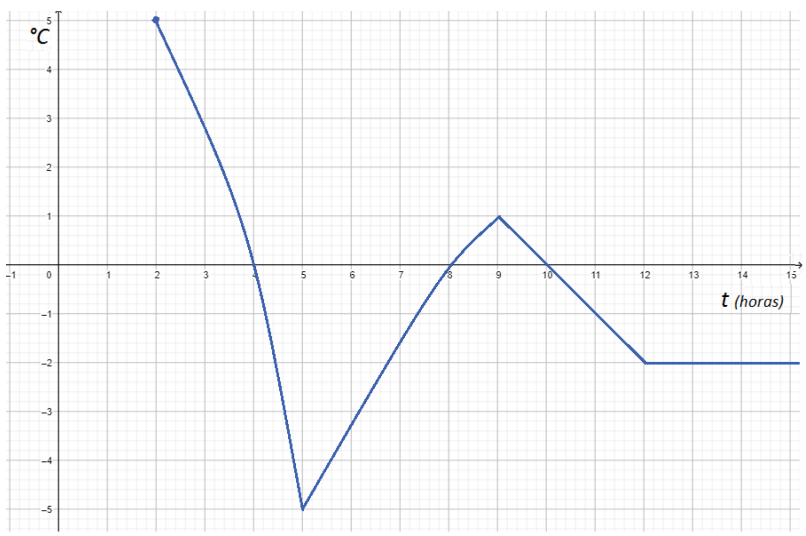
Donde t está expresa la cantidad de años transcurridos desde el 2021 (45.808.747 es la población estimada en 2021) Así, por ejemplo, si quisiéramos saber cuál será la población en 2025, deberíamos tomar $t = 2025 - 2021 = 4$ y calcular:

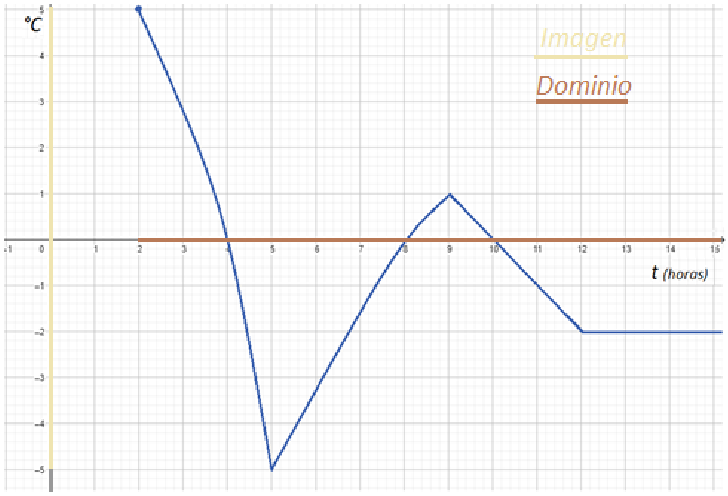
$$P(4) = 45.808.747 \cdot (1{,}0093)^4 = \ 47.536.753 \text{ habitantes}$$

<u>Interpretación del gráfico de una función</u>

Consideremos el siguiente ejemplo: para evaluar la temperatura en la hora t de un depósito frigorífico en donde se guarda alimento, se registró la temperatura (en ºC) en forma continua desde las 2 horas, en que se puso en funcionamiento el motor de refrigeración, en adelante. Se obtuvo el siguiente gráfico donde en el eje X (abscisas) se representa la hora de la medición y en el eje Y (ordenadas) representamos la temperatura registrada. Podemos decir entonces que estamos viendo el gráfico de la función,

$f(t)$ = temperatura en grados centígrados (°C) en cada instante t de en horas.





¿Cuál es el dominio de esta función?

Si miramos el eje de las abscisas, empieza en $t = 2$ y luego sigue indefinidamente.

$$\boldsymbol{Dominio f(t)} = [\mathbf{2};\ +\infty)$$

¿Y la imagen? Vemos que en el eje de las ordenadas el valor mayor fue de 5°, mientras que nunca fue menor a $-5°$.

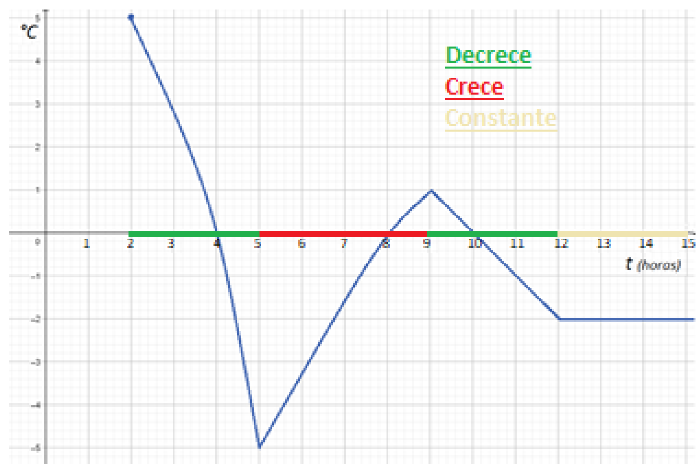
$$\boldsymbol{Imagen\ f(t)} = [-\mathbf{5}; \mathbf{5}]$$

¿En cuáles intervalos de t la temperatura creció, y en cuales decreció?

En el eje de las abscisas observamos que la temperatura creció en el intervalo $(\mathbf{5}; \mathbf{9})$. Decimos entonces que la función en ese intervalo es ***creciente*** (lo denotamos $C^{\uparrow}$)

En cambio, la temperatura decreció en dos intervalos de tiempo, que son el $(\mathbf{2}; \mathbf{5})$ y el $(\mathbf{9}; \mathbf{12})$. La función en esos intervalos es ***decreciente*** ($C^{\downarrow}$).

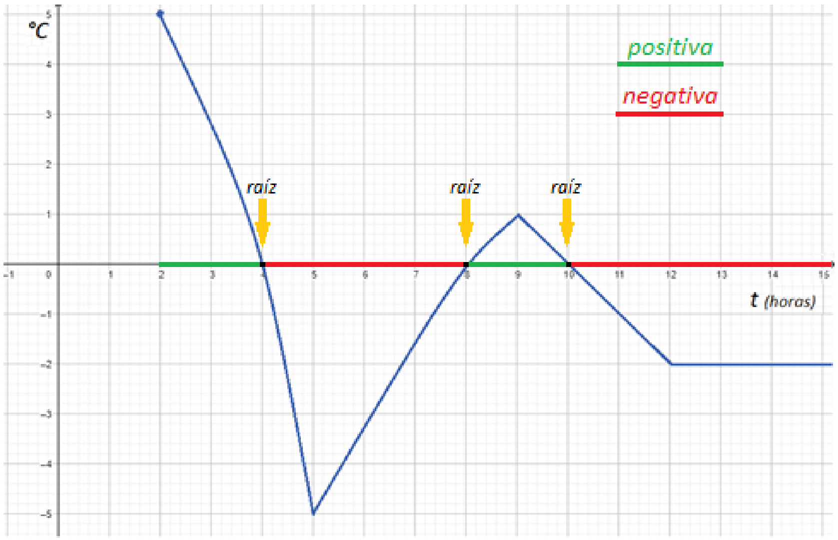
A partir de las 12 horas la temperatura se mantuvo constante, de manera que decimos que la función es ***constante*** en el intervalo $(\mathbf{12};\ +\infty)$.



Si a lo a largo de un intervalo en el eje X, observamos que a mayor valor de x mayor es el valor de $y = f(x)$, entonces decimos que $f(x)$ es **creciente** en ese intervalo.

Si en cambio, a mayor valor de x menor es el valor de $y = f(x)$, entonces decimos que $f(x)$ es **decreciente** en ese intervalo.

Y si no aumenta ni disminuye, es **constante**.



¿En cuáles intervalos del eje x la temperatura es **mayor a 0°**? En aquellos en que la gráfica de la función esté **por encima del eje $\boldsymbol{x}$.** Esto se da en los intervalos de 2 a 4 horas y de 8 a 10. Por lo tanto, la función es ***positiva*** (y lo denotamos C^+) en los intervalos $(\mathbf{2};\mathbf{4})\ \boldsymbol{U}\ (\mathbf{8};\mathbf{10})$; y es ***negativa*** (C^-) en $(\mathbf{4};\mathbf{8})\ \boldsymbol{U}\ (\mathbf{10};+\infty)$

¿En qué instantes la temperatura fue de <u>cero</u> grados, o sea, hay una "***raíz***"? En aquellos lugares donde vemos que la gráfica de la función <u>toca el eje de las abscisas</u>. Por lo tanto, serán aquellos en que la abscisa vale $x = 2$, 4 ó 10.

> Los intervalos del eje X en los cuales la gráfica de la función está por encima de los mismos son aquellos dónde la función es **positiva**, o sea, $f(x) = y > 0$. En los que está por debajo, es **negativa**, o sea, $f(x) = y < 0$. Los primeros se llaman intervalos de positividad (C^+) y los segundos de negatividad (C^-).
>
> Los valores del eje X en que la gráfica de la función se interseca con él, o sea los valores de x tales que $f(x) = y = 0$ son las **raíces** de la función (C^0).

<u>Función Lineal</u>

Llamamos **función lineal** a toda función $f(x)$ que pueda expresarse como:

$$y = f(x) = ax + b$$

donde a y b son constantes y x es la variable.

Por motivos que ya veremos, al valor de "a" lo llamaremos "*pendiente*" y al valor de "b" "*ordenada al origen*".

(NOTA: es muy común también designar con "m" a la pendiente de la recta).

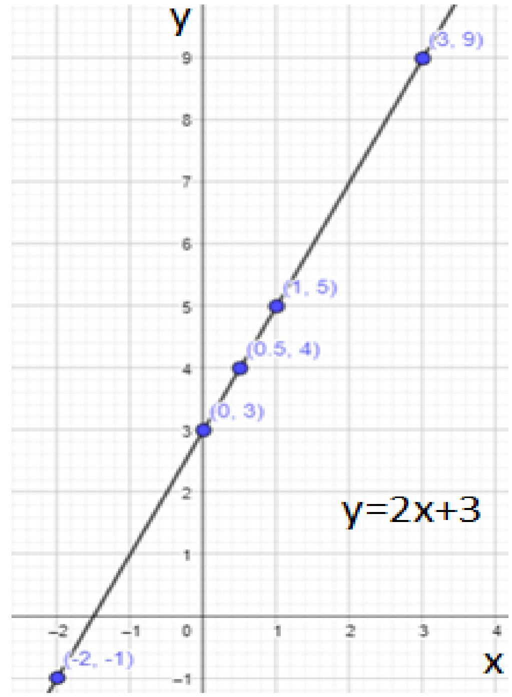
Ejemplo:

$$y = f(x) = 2x + 3$$

Su pendiente es 2 y su ordenada al origen es 3.

Si hiciésemos la prueba de tomar una función así, y evaluarla en varios valores de x, obtendríamos, por ejemplo,

x	$\boldsymbol{f(x) = 2x + 3}$	$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f(x)})$
0	$2 \cdot 0 + 3 = \mathbf{3}$	$(\mathbf{0};\ \mathbf{3})$
1	$2 \cdot 1 + 3 = \mathbf{5}$	$(\mathbf{1};\ \mathbf{5})$
3	$2 \cdot 3 + 3 = \mathbf{9}$	$(\mathbf{3};\ \mathbf{9})$
-2	$2(-2) + 3 = \mathbf{-1}$	$(\mathbf{-2};\ -1)$
$\mathbf{\frac{1}{2} = 0,5}$	$2 \cdot \frac{1}{2} + 3 = \mathbf{4}$	$(\mathbf{\frac{1}{2}};\ \mathbf{4})$



$$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y}) = (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f(x)}) = (\boldsymbol{x};\ \mathbf{2}\boldsymbol{x} + \mathbf{3})$$

El gráfico de una función lineal, o sea, el conjunto de puntos $(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f(x)})$, dará por resultado una recta.
Y gracias a que "*dados dos puntos, existe una única recta que pasa por esos dos puntos*", entonces, si nos dan una función lineal cualquiera, bastará con conocer dos puntos por los que pasa esa recta para poder dibujarla.

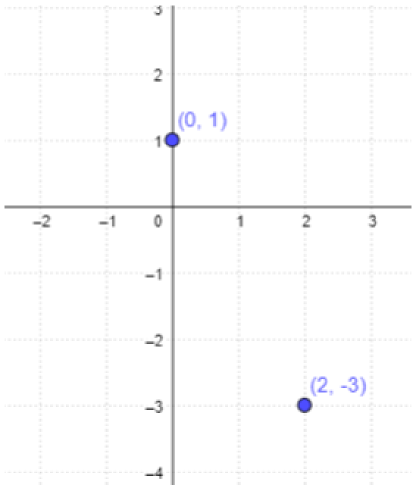
Ejemplo:

Realizar el gráfico de $y = -2x + 1$

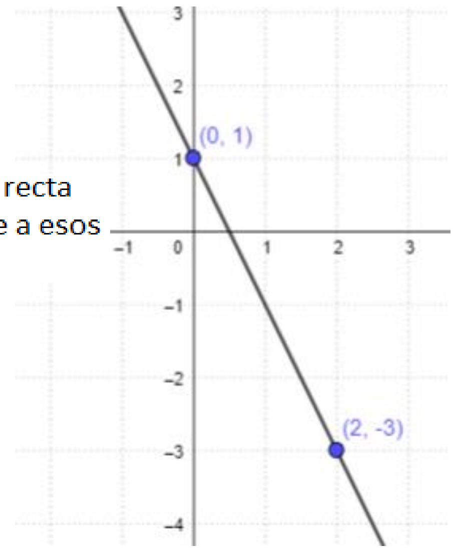
1°) Elegimos dos valores cualesquiera de x por ejemplo, $x = 0$ y $x = 2$, y calculamos cuánto vale $f(x)$, para así obtener dos puntos $(x;\ y)$.

x	$\boldsymbol{f(x) = -2x + 1}$	$(\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{f(x)}) = (\boldsymbol{x};\ \boldsymbol{y})$
0	$-2 \cdot 0 + 1 = \mathbf{1}$	$(\mathbf{0};\ \mathbf{1})$
2	$-2 \cdot 2 + 1 = \mathbf{-3}$	$(\mathbf{2};\mathbf{-3})$

2°) Dibujamos ambos puntos en el plano cartesiano:



3°) Trazamos la recta que contiene a esos dos puntos.

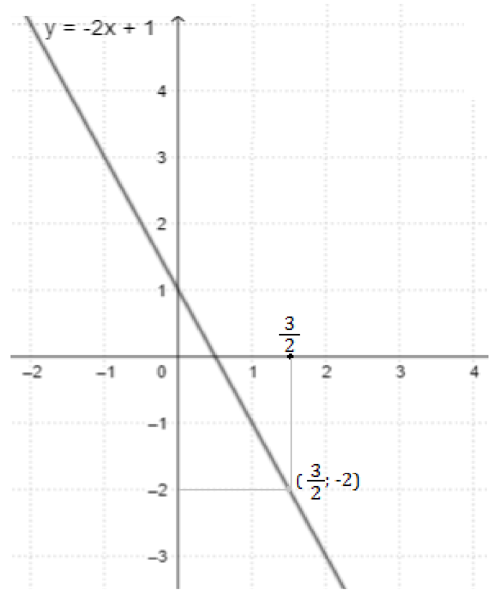


Supongamos por ejemplo que ahora, a partir del gráfico, quisiéramos saber cuánto vale $f(\frac{3}{2})$.

O sea, queremos conocer la imagen de $f(x)$ para $x = \frac{3}{2}$

Para ello buscamos en el gráfico a $x = \frac{3}{2}$ en el eje de abscisas y nos movemos por el eje vertical hasta el gráfico de la recta, para luego ir horizontalmente a buscar en dónde corta al eje y de las ordenadas. El correspondiente valor de y (en este caso -2) es el valor de $f(\frac{3}{2})$. Es decir:

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2$$

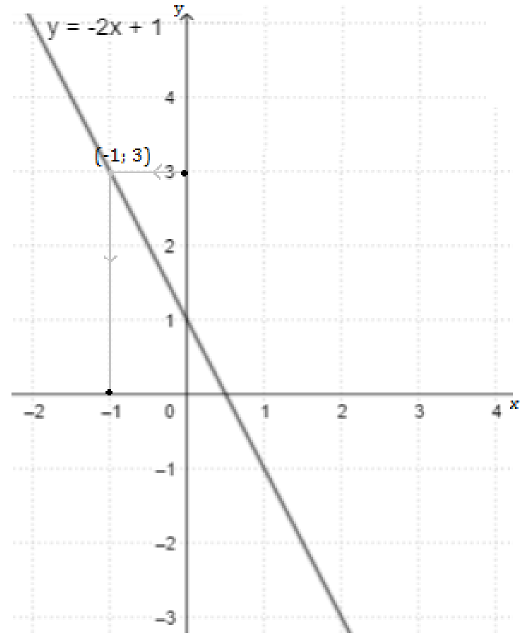


Comprobemos el resultado en forma analítica:

Dado que $f(x) = -2x + 1$, entonces

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = -2 \cdot \frac{3}{2} + 1 = -3 + 1 = -2$$

A la inversa: ¿Cómo podemos hallar gráficamente para cuál valor de x se obtiene por imagen el valor $y = 3$, o sea, para que valor de x vale que $f(x) = 3$?



Procedemos a la inversa, partimos del valor 3 en el eje y, para luego movemos horizontalmente hasta hallar el gráfico de la recta, y seguidamente nos movemos en vertical hasta hallar el correspondiente valor de x. Vemos así que a $y = 3$ le corresponde $x = -1$. O sea:

$$f(-1) = 3$$

¿Y cómo podemos comprobarlo analíticamente?

Dado que $f(x) = -2x + 1$, busco el valor de x tal que $f(x) = 3$ debe ser:

$$f(x) = -2x + 1 = 3$$

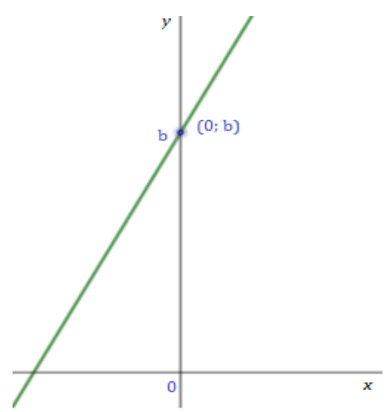
Despejo la x y obtengo:

$$-2x = 3 - 1$$
$$-2x = 2$$
$$x = \frac{2}{-2} = -1$$

<u>Parámetros de la recta.</u>

Veremos cómo a partir de los llamados "**parámetros**" o "**coeficientes** de la recta" podemos predecir cómo será su gráfico.

<u>Ordenada al origen "b"</u>



Observemos que para una función lineal cualquiera

$f(x) = ax + b$

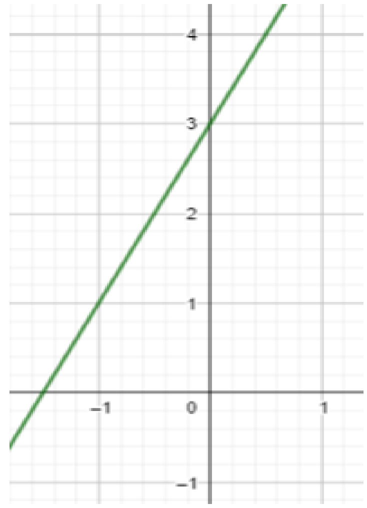
Siempre vale que: $f(0) = a \cdot 0 + b = b$

O sea, que si $x = 0$, entonces $y = b$.

Quiere decir que el punto $(0; f(0)) = (0; b)$ pertenece al gráfico de la función, y es dónde la recta corta al eje de ordenadas. Por tal motivo al parámetro "b" se lo llama la "*ordenada al origen*".

Ejemplo:

$$y = f(x) = 2x + 3$$
$$f(0) = 2 \cdot 0 + 3 = 3$$

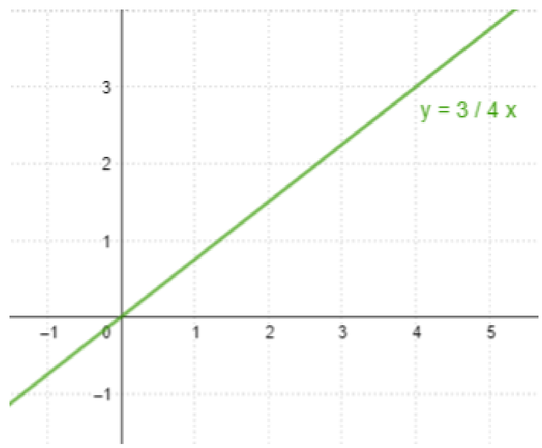


Ejemplo:

$$y = f(x) = \frac{3}{4}x \quad = \quad \frac{3}{4}x + 0$$

(Acá $b = 0$)

$$f(0) = \frac{3}{4} \cdot 0 = 0$$



Pendiente de la recta "a": Para interpretar ahora el valor de a, veamos un caso particular. Consideremos una vez más: $f(x) = 2x + 3$

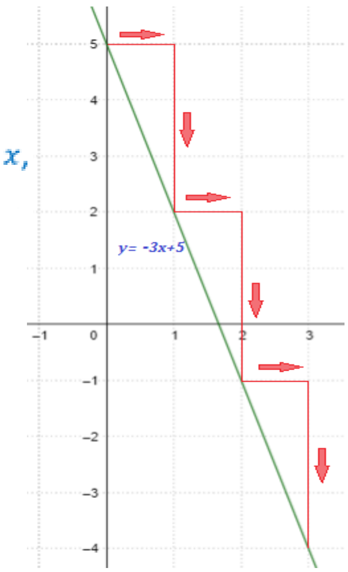
x	$y = f(x) = 2x + 3$
0	3
1	5
2	7
3	9
…	….

Por cada unidad que aumenta x, la función aumenta su valor en 2 unidades, que es justamente el valor de su pendiente.

Otro ejemplo, consideremos $f(x) = -3x + 5$.

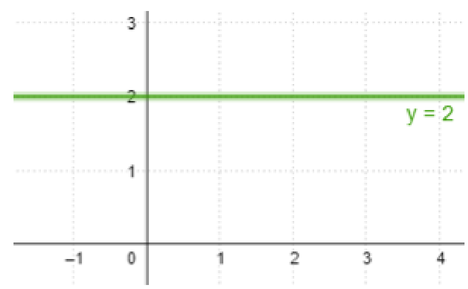
x	$\boldsymbol{y = f(x) = -3x + 5}$
0	5
1	2
2	-1
3	-4
…	….

Por cada unidad que aumenta x, la función <u>disminuye</u> su valor en 3 unidades.



Un ejemplo muy particular: $y = f(x) = 2$ *(O sea, $a = 0$)*

x	$\boldsymbol{y = f(x) = 2}$
0	2
1	2
2	2
…	….



Entonces, como hemos visto, la pendiente a nos da una idea de la inclinación de la recta, y por tal motivo se la llama "**pendiente de la recta**".

<u>Ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados</u>

Dijimos que, para graficar una recta cualquiera, bastaba con tomar dos puntos cualesquiera de ella, dibujarlos, y trazar luego la recta que pasa por dichos puntos, pero ¿Cómo podemos, analíticamente, encontrar la ecuación de una recta que pasa por dos puntos dados? Para ello basta con resolver un sencillo problema de dos ecuaciones con dos incógnitas.

Por ejemplo, supongamos que quiero hallar la ecuación de una recta que contiene, que pasa, por los puntos de coordenadas $(3;\ 1)$ y $(5;\ -3)$.

Qué la recta contenga a esos dos puntos significa que si nuestra recta es $f(x) = ax + b$, entonces

$(x; y) = (x; f(x))$	x	$f(x) = a \cdot x + b = y$
$(3;\ 1)$	3	$a\ \cdot 3 + b = 1$
$(5; -3)$	5	$a\ \cdot 5 + b = -3$

$$\begin{cases} a \cdot 3 + b = 1 \\ a \cdot 5 + b = -3 \end{cases}$$

Queda planteado un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas en el que tenemos que hallar los valores de a y de b. Vamos a resolverlo.

Tomamos una de las dos ecuaciones, por ejemplo, la primera, y elegimos una variable para despejar, por ejemplo, la b.

$$a \cdot 3 + b = 1 \;\Rightarrow b = 1 - a \cdot 3$$

Sustituimos b en la segunda ecuación,

$$a \cdot 5 + b = -3 \;\;\Rightarrow\;\; a \cdot 5 + (1 - a \cdot 3) = -3$$

Despejo a,

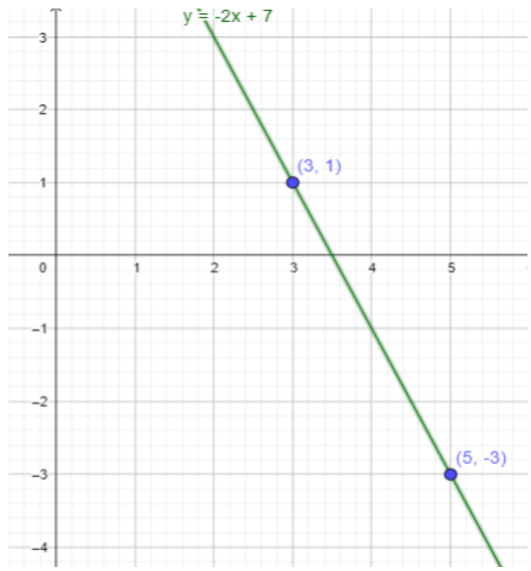
$$a \cdot 5 + 1 - a \cdot 3 = -3 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a \cdot 5 - a \cdot 3 = -3 - 1 \;\;\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\; 2 \cdot a = -4 \;\;\Leftrightarrow \boldsymbol{a} = \mathbf{-2}$$

Vuelvo a la primera ecuación y sustituyo la a para así hallar el valor de b

$$b = 1 - a \cdot 3 \;\;\Rightarrow\;\; \boldsymbol{b} = 1 - (-2) \cdot 3 = \mathbf{7}$$

Por lo tanto,

$$\boldsymbol{y = -2x + 7}$$



<u>Otra manera de calcular la ecuación de la recta</u>:

Habíamos dicho que la pendiente a, nos da entonces idea de cuanto se incrementa o disminuye su valor la variable $y = ax + b$ por cada unidad que se incrementa x.

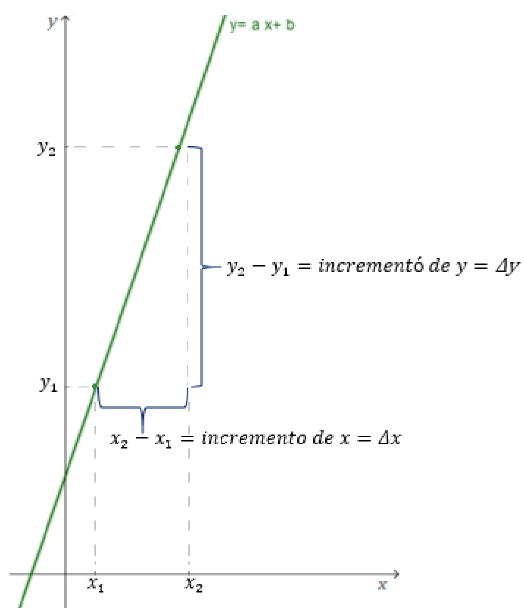
Más aun, siempre vale que si se tienen dos puntos cuales quiera sobre la recta, de coordenadas $(x_1;\; y_1)$ $(x_2;\; y_2)$, entonces:

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Así, por ejemplo, si sé que mi recta pasa por los puntos $P = (2;\; 4)$ y $Q = (8; 7)$ puedo deducir rápidamente cuál será su pendiente realizando la siguiente cuenta,

$$P = (x_1;\; y_1) = (2;\; 4) \quad Q = (x_2;\; y_2) = (8; 7)$$

$$\boldsymbol{a} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{7 - 4}{8 - 2} = \frac{3}{6} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$$



Una vez hallada la pendiente, calculamos el valor de la ordenada al origen b del siguiente modo: ya sabemos que la recta se escribe como $y = \frac{1}{2}x + b$, por lo tanto, para determinar el valor de b, tomemos uno cualesquiera de los dos puntos P y Q de antes, por ej, el punto $P = (2;\ 4)$

Dado que el gráfico de la recta contiene a este punto $P = (2;\ 4)$, debemos buscar que valor hay que darle a b para que si $x = 2$ sea entonces $y = \frac{1}{2}2 + b = 4$

$$\frac{1}{2}2 + b = 4 \iff 1 + b = 4 \iff b = \mathbf{3}$$

(si lo hubiésemos hecho con $Q = (8;7)$ *quedaba* $\frac{1}{2}8 + b = 7 \iff 4 + b = 7 \iff b = 3$ *)*

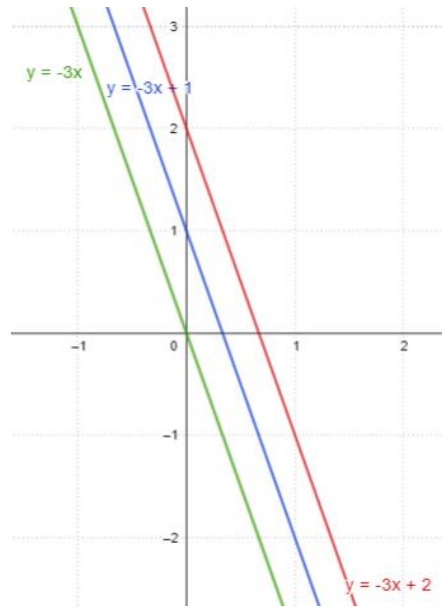
O sea que la ecuación de la recta es $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x + 3}$

Rectas paralelas

Recordemos que dos rectas son paralelas cuando **no** se cortan en ningún punto. En tal caso, tienen la misma pendiente, es decir, son paralelas si el valor de la pendiente "a" coincide.

Por ejemplo, consideremos las rectas.

$$\boldsymbol{y = -3x}$$
$$\boldsymbol{y = -3x + 1}$$
$$\boldsymbol{y = -3x + 2}$$



Al tener todas el mismo valor de pendiente, $a = -3$, resultan ser paralelas.