Matemática y Estadística (Teórico)

Unidad 1

Conjuntos numéricos y ecuaciones.

Operaciones aritméticas sencillas, reglas de jerarquía, resolución de problemas aplicados.
Ecuaciones y sistema de ecuaciones lineales, aplicación a problemas.
Representación de intervalos numéricos continuos a partir de una inecuación.

Roberto Fiadone

Números naturales y enteros

Conjuntos en general

Un Conjunto es una ***colección*** de objetos. Por ejemplo, el conjunto de las vocales.

A cada objeto del conjunto se lo llama ***elemento.*** Así, los elementos del conjunto de las vocales son: a, e, i, o, u.

Un modo de referirnos a un conjunto es nombrarlo mediante una letra mayúscula y escribir sus elementos, en cualquier orden, dentro de llaves.

Ejemplo,

$$\textbf{A=} \{\boldsymbol{a}, \boldsymbol{e}, \boldsymbol{o}, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{u}\}$$

Números Naturales

Algunos conjuntos numéricos tienen nombres particulares. Por ejemplo, los ***números naturales,*** que son aquellos que nos ayudan a contar, se simbolizan con la letra $\mathbf{N}$**,** y está formado por infinitos elementos.

$$\boldsymbol{N} = \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \mathbf{5}.\dots\}$$

Si le agregamos el cero al conjunto de los naturales, lo nombramos $\boldsymbol{N_0}$

$$\boldsymbol{N_0} = \{\mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}, \dots\}$$

Números Enteros

Algunas magnitudes como la temperatura, la altura, el tiempo, etc. usan valores **por debajo** del cero, o sea, lo que llamamos "números negativos": por ejemplo, la orilla del mar Muerto está 423 metros **por debajo del nivel del mar**; es decir, que podemos expresar que se encuentra a −423 m.

Si la temperatura es de 5 grados bajo cero, lo simbolizamos diciendo que hace -5 grados. O si tenemos una deuda de \$20, es como decir que tenemos -20 pesos.

Los ***números naturales***, junto con el ***cero*** y los ***enteros negativos*** forman el llamado conjunto de los ***números enteros.*** Se lo simboliza con la letra $\boldsymbol{Z}$

$$\boldsymbol{Z} = \{\dots, -\mathbf{4}, -\mathbf{3}, -\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{4}\dots\}$$

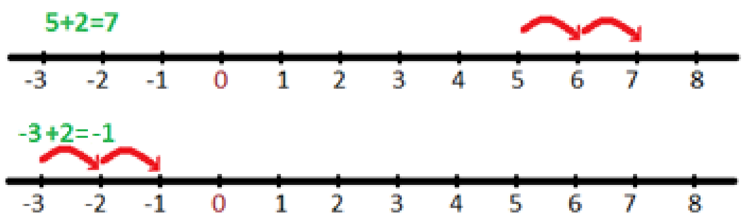
O sea que el conjunto N_0 es un subconjunto que está incluido dentro del conjunto de los Z (esto se escribe como $N_0 \subset \boldsymbol{Z}$)

Representación en la recta numérica

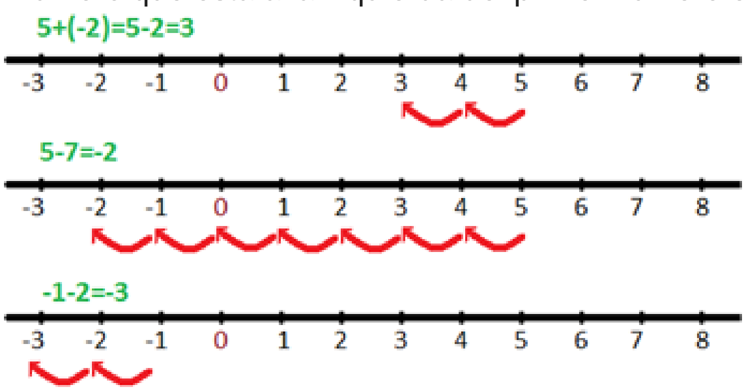
En la recta numérica, todo número que se encuentra a la izquierda de otro es menor que él. Un número entero negativo es siempre menor que cero y que un número entero positivo.

Suma y resta de números enteros

Cuando dado un número entero le **sumamos otro** que sea **positivo**, lo que obtenemos en un **nuevo número entero** que está **a la derecha del dado**.



Si en cambio le sumamos un número negativo, o si le restamos uno positivo, obtenemos un número que está a la izquierda del primer número entero.



Al **multiplicar o dividir** dos números enteros entre sí, el signo del número entero resultante se decide según la “regla de los signos”:

- Cuando ambos números tienen el mismo signo, el resultado es siempre un número positivo.
- Cuando tienen signos contrarios, el resultado es siempre un número negativo.

a	b	$\boldsymbol{a\cdot b}$ ó $\boldsymbol{a:b}$
$+$	$-$	$-$
$-$	$+$	$-$
$+$	$+$	$+$
$-$	$-$	$+$

O sea que cuando multiplicamos o dividimos dos números de **igual signo da positivo**, pero si son de **diferente signo da negativo**.

Ejemplos,

$3\cdot(-2)=-6$

$(-2)\cdot(-4)=8$

$10:(-5)=-2$

$(-6):(-2)=3$

Operaciones combinadas. Jerarquía de las operaciones

Los cálculos en matemáticas cuando tenemos que realizar varias operaciones combinadas, se realizan siguiendo las siguientes reglas:

1. ***Realizamos las operaciones entre paréntesis, corchetes y llaves.***
2. ***Calculamos las potencias y raíces (*** 4^3; $\sqrt{9}$ etc).
3. ***Calculamos los productos y cocientes.***
4. ***Finalmente se hacen las sumas y restas (que son las que separan los llamados “términos”).***

   Nota: Cuando tenemos dos operaciones con la misma jerarquía, entonces se realizan de izquierda a derecha como vayan apareciendo.

Ejemplos,

NOTACION: cuando se escribe un n° e inmediatamente un paréntesis, queremos significar que estamos multiplicando, así, por ejemplo, si escribimos: $6\,(4+2)$, *debe leerse como* $6\cdot(4+2)$.

- $7-5\cdot3-(-3\cdot8):2=$
  $(ponemos\ en\ claro\ cuales\ son\ los\ términos\ separándolos\ bien)$
  $7\ \ -\ \ 5\cdot3\ \ -\ \ (-3\cdot8):2=$

$7 \ - \ 5 \cdot 3 \ - \ (-24): 2 =$
$7 \ - \ 15 \ -(-12) = (recordemos\ que\ menos\ con\ menos\ da\ más)$
$7 - 15 + 12 = \mathbf{4}$

- $5\,(3 \ + \ 4) =$
  $5 \ \cdot \ 7 = \ \mathbf{35}$
  (En este caso particular también podríamos haber aplicado la regla distributiva
  $5 \cdot 3 + 5 \cdot 4 = 15 + 20 = \mathbf{35})$

- $7 + 4 \cdot 8 - 5 + 3 \cdot (2 - 8: 2) =$
  $(pongamos\ en\ claro\ cuales\ son\ los\ términos\ separándolos\ bien)$
  $7 \ + \ 4 \cdot 8 \ - \ 5 \ + \ 3 \cdot (2 \ - \ 8: 2) =$
  $(realizamos\ primero\ lo\ que\ está\ entre\ paréntesis)$
  $7 \ + \ 32 \ - \ 5 \ + \ 3 \cdot (2 \ - \ 4) =$
  $7 \ + \ 32 \ - \ 5 + \ 3 \cdot (-2) =$
  $7 + 32 - 5 - 6 = \mathbf{28}$

- $10\,(8 + 6^2: 3) =$
  Primero realizo lo que está en el paréntesis, y dentro de ese paréntesis, la primera operación que realizo es la potenciación)
  $10\,(8 + 36: 3) =$
  $10\,(8 + 12) =$
  $10 \cdot 20 = \mathbf{200}$

- $3\,(-3) - 2(-4) =$

  $3(-3) \ - \ 2(-4) =$
  $-9 \ - \ 2(-4) =$
  $-9 \ - \ (-8) =$
  $-9 \ + \ 8 = \mathbf{-1}$

- $(-16 + 6) \cdot (-4): (-5 \cdot 2^3) =$
  $(-10) \cdot (-4): (-5 \cdot 8) =$
  $40: (-40) = \mathbf{-1}$

Potenciación

Elevar o calcular la potencia de un número entero "a" a un número natural “n” significa multiplicar ese número a unas n-veces por sí mismo.

$3^2 = 3 \cdot 3 = 9$
$3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$
$5^3 = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
Propiedades,

- Todo n° elevado a la 2 (que también se dice "elevado al cuadrado"), sea negativo o positivo, dará por respuesta un n° positivo, sin importar si es negativo o positivo, debido a la ya mencionada regla de los signos:
  Ej: $(-5)^2 = (-5) \cdot (-5) = 25$

- Todo número elevado a la cero, por definición, da siempre 1. $(a^0 = 1)$
  Ej: $3^0 = 1$ $(-3)^0 = 1$

- Todo número elevado a la uno es igual a sí mismo. $(a^1 = a)$
  Ej $4^1 = 4$ $(-4)^1 = -4$

¿Qué significa elevar un número a una potencia negativa?

Primero se **invertimos su base**, y se eleva al número resultante a la **misma potencia**, **pero sin su signo menos**:

$$\boldsymbol{a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^{n}}$$

$$\mathbf{4^{-3}} = \left(\frac{1}{4}\right)^3 = (0{,}25)^3 = \mathbf{0{,}015625}$$

$$\mathbf{2^{-4}} = \left(\frac{1}{2}\right)^4 = (0{,}5)^4 = \mathbf{0{,}0625}$$

$$\mathbf{\frac{1}{3}^{-2}} = \left(\frac{3}{1}\right)^2 = 3^2 = \mathbf{9}$$

<u>Raíz cuadrada</u>

Se llama "**raíz cuadrada**" de a (y se escribe $\boldsymbol{\sqrt{a}}$) a un nuevo número que, multiplicado por sí mismo, nos de ese número a. Ejemplo:

$\sqrt{9} = 3$ pues $3 \cdot 3 = 9$ $\sqrt{64} = 8$ pues $8 \cdot 8 = 64$ $\sqrt{0} = 0$ pues $0 \cdot 0 = 0$

<u>**No** existe la raíz cuadrada de un número negativo</u>, pues es imposible hallar un número que multiplicado por sí mismo de negativo.

Ejemplo,

$$\sqrt{(-9)} = \boldsymbol{no\ existe}$$

<u>Números Fraccionarios (o "racionales")</u>

Los **números fraccionarios o racionales** surgen de la necesidad de expresar partes de la unidad.
Solemos escribir a estos números como una fracción o cociente de dos enteros:

$$\frac{a}{b} = a : b$$

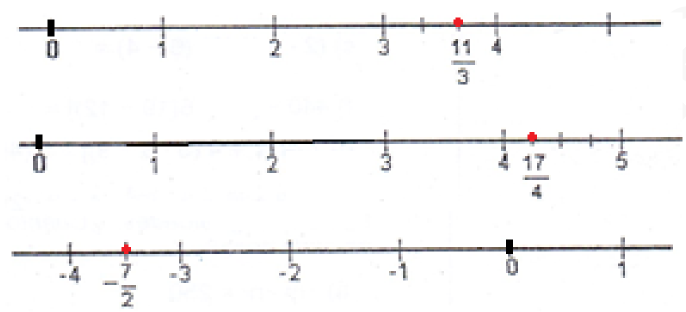
donde a y b son números **enteros**, $(b \neq 0)$.

Ejemplos

$$\frac{3}{5} = 3:5 = 0{,}6 \qquad \frac{-4}{3} = (-4):3 = -1,\hat{3}\ (= -1{,}33333\ldots)$$

Al número $\boldsymbol{a}$ se lo llama **numerador** y al número $\boldsymbol{b}$, **denominador.** Por ejemplo $\frac{1}{4}$ y $\frac{3}{5}$ son fracciones de la unidad en las que el numerador es menor que el denominador y se representan en la recta numérica entre el 0 y 1.

También son números racionales $\frac{11}{3}$; $\frac{17}{4}$ y $\frac{-7}{2}$: En estos casos el numerador es mayor que el denominador son números mayores que 1 o menores que -1.

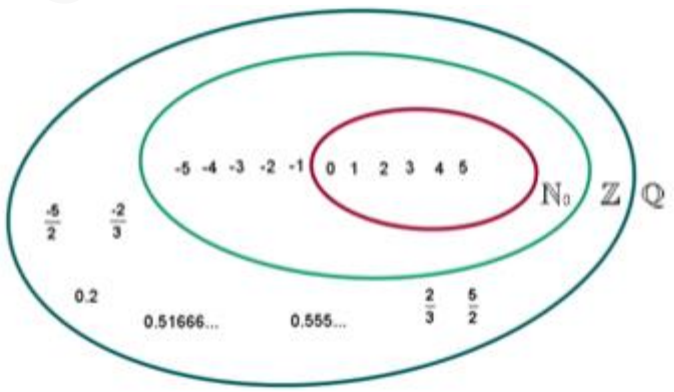


Todo número entero es también un número racional, pues puede representarse como una fracción donde el numerador es el número entero dado y el denominador es igual a 1.

$$2 = \frac{2}{1} \qquad -3 = \frac{-3}{1} = \frac{3}{-1} = -\frac{3}{1}$$

Al conjunto de todos los fraccionarios se los denomina ***conjunto de números racionales*** y se lo simboliza con la letra **Q**

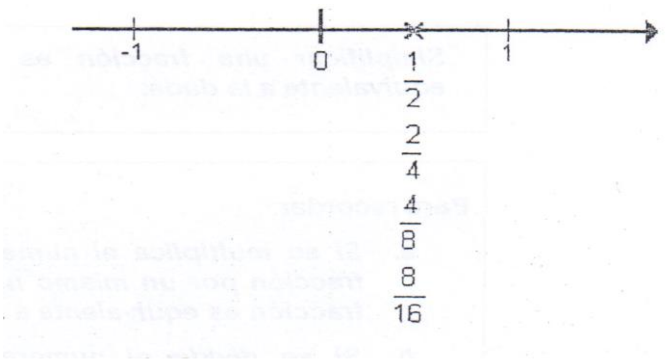
$$N_0 \subset Z \subset Q$$



<u>Expresiones o fracciones equivalentes.</u>

Notemos que si, por ejemplo, representamos sobre la recta numérica a los números $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{16}$, todos ellos ocupan el mismo punto de la recta, pues en realidad, al realizar el cociente entre el numerador y el denominador de cada una, obtenemos el mismo número.

$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}=\frac{8}{16}=0{,}5$$



Decimos entonces que $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{4}{8}$ y $\frac{8}{16}$ representan el mismo número racional, o bien que son todas fracciones ***equivalentes*** a $\frac{1}{2}$

Existen infinitas fracciones equivalentes a $\frac{1}{2}$ y se pueden obtener multiplicando al numerador y al denominador por un mismo número distinto de cero.

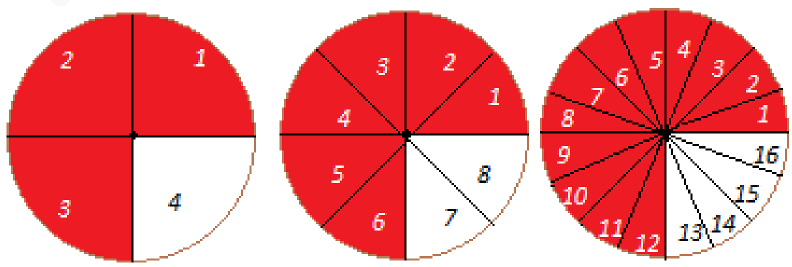
En general, cualquiera que sea el número entero $k \neq 0$, las expresiones $\frac{a}{b}$ y $\frac{\boldsymbol{k.a}}{\boldsymbol{k.b}}$ ***son equivalentes*** y representan el mismo número racional, o sea

$$\frac{a}{b}=\frac{k\cdot a}{k\cdot b}$$

Por ejemplo, son fracciones equivalentes y representan el mismo número racional, los números:

$$\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} \qquad \frac{\mathbf{3}\cdot 2}{\mathbf{4}\cdot 2}=\frac{\mathbf{6}}{\mathbf{8}} \qquad \frac{\mathbf{3}\cdot 3}{\mathbf{4}\cdot 3}=\frac{\mathbf{9}}{\mathbf{12}}$$

$$\frac{\mathbf{3}\cdot 4}{\mathbf{4}\cdot 4}=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{16}} \qquad \frac{\mathbf{3}\cdot(-4)}{\mathbf{4}\cdot(-4)}=\frac{-12}{-16}=\frac{\mathbf{12}}{\mathbf{16}}$$



<u>Simplificación de una fracción:</u>

También podemos encontrar fracciones equivalentes a una fracción dada cuando podemos dividir al numerador y al denominador por un mismo número que sea divisor de ambos. Esto es lo que habitualmente llamamos ***simplificar*** una fracción.

Ejemplo

Dada la fracción: $\mathbf{\frac{28}{36}}$

Como numerador y denominador tienen por divisor común al número 4, podemos simplificar la fracción dividiendo a ambos por ese mismo número:

$$\mathbf{\frac{28:4}{36:4}=\frac{7}{9}}$$

Esta nueva fracción, $\mathbf{\frac{7}{9}}$**,** es entonces equivalente a la original.

Notemos sin embargo que para la fracción $\mathbf{\frac{7}{9}}$ no existe un número natural distinto de 1 que divida tanto al 7 como al 9. O sea, no podemos reducir al $\mathbf{\frac{7}{9}}$ mediante una nueva simplificación. En este caso decimos que la fracción $\frac{7}{9}$ es ***irreducible*****.**

Suma y resta de fracciones

Con igual denominador es fácil, solo hay que sumar los numeradores y dejar igual el denominador:

$$\frac{3}{4}+\frac{7}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

Se complica cuando tengo numeradores distintos,

$$\frac{5}{3}+\frac{4}{9}=¿?$$

Veamos dos maneras de resolverlas (cada uno elija la que le guste):

Una manera es aplicar esta fórmula:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{\boxed{(a\cdot d)}+\boxed{(b\cdot c)}}{\boxed{b\cdot d}}$$

En nuestro caso quedaría así:

$$\frac{5}{3}+\frac{4}{9}=\frac{5\cdot 9+3\cdot 4}{3\cdot 9}=\frac{57}{27}$$

que si simplificamos la respuesta nos queda la fracción irreducible:

$$\frac{57:3}{27:3}=\mathbf{\frac{19}{9}}$$

Otro método: (más complicado pero que posiblemente muchos lo vieron en la escuela y que además sirve para sumar más de dos fracciones al mismo tiempo)

Primero buscamos, de todos los números que sean **múltiplos de ambos denominadores, el menor**. En este caso, múltiplos tanto de tres como de 9 son por ejemplo el 90, el 45, el 27, el 18, el 9… y el menor es el 9, pues $3x3 = 9$ y $9x1 = 9$ Escribo entonces este “denominador común”:

$$\frac{5}{3}+\frac{4}{9}=\frac{\quad}{\mathbf{9}}=$$

Para decidir que va en el numerador, primero calculo “9 dividido 3 da 3, y 3 por 5 da **15”, y además “**9 dividido 9 da 1, y 1 por 4 da **4”**
Entonces escribo:

$$\frac{5}{3}\ +\ \frac{4}{9}=\frac{15\ +\ 4}{9}=\frac{\mathbf{19}}{\mathbf{9}}$$

Otro ejemplo,

$$\frac{5}{20}-\frac{6}{15}=¿?$$

Con el primer método *(ojo que tengo un menos ahora entre las dos fracciones, así que en el numerador tengo que restar):*

$$\frac{5}{20}-\frac{6}{15}=\frac{5\cdot 15-20\cdot 6}{300}=\frac{75-120}{300}=\frac{-45}{300}$$

Que si simplificamos (por ejemplo, dividiendo por 15 numerador y denominador), nos queda:

$$\frac{-45}{300}=\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{20}}$$

Con el otro método hubiéramos procedido tomando como en menor múltiplo común de 20 y 15 al 60:

$$\frac{5}{20}-\frac{6}{15}=\frac{\quad}{60}$$

Y como 60 dividido 20 da 3, y 3 por 5 da **15**. Y 60 dividido 15 da 4, y 4 por 6 da **24**, y además, como estoy restando, escribo $15-24$,

$$\frac{5}{20}-\frac{6}{15}=\frac{15-24}{60}=\frac{-9}{60}=(simplifico)=-\frac{\mathbf{3}}{\mathbf{20}}$$

Observemos que podríamos también haber simplificado ambas fracciones a restar <u>antes</u> de haber hecho la cuenta:

$$\frac{5}{20}-\frac{6}{15}=\frac{1}{4}-\frac{2}{5}=\frac{5-8}{20}=\frac{\mathbf{-3}}{\mathbf{20}}$$

Otro ejemplo,

$$6-\frac{3}{5}=\frac{6}{1}-\frac{3}{5}=(el\ 5\ es\ múltiplo\ de\ 1\ y\ de\ 5)$$

$$\frac{30-3}{5}=\mathbf{\frac{27}{5}}$$

<u>Multiplicación</u>:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}}$$

Ejemplo,

$$\frac{3}{5}\cdot\frac{-4}{6}=\frac{3\cdot(-4)}{5\cdot 6}=\mathbf{\frac{-12}{30}}$$

$$\frac{2}{7}\cdot 4=\frac{2}{7}\cdot\frac{4}{1}=\mathbf{\frac{8}{7}}$$

<u>División</u>:
Dividir una fracción por otra es **equivalente a multiplicar la primera fracción por la inversa de la segunda**. Simbólicamente, si $c\neq 0$, entonces:

$$\boldsymbol{\frac{a}{b}:\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{a\cdot d}{b\cdot c}}$$

Ejemplos,

$$\frac{6}{7}:\frac{3}{8}=\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{3}=\mathbf{\frac{48}{21}}$$

$$\frac{6}{7}:3=\frac{6}{7}:\frac{3}{1}=\frac{6}{7}\cdot\frac{1}{3}=\mathbf{\frac{6}{21}}$$

<u>Cálculo de porcentajes</u>

En esta breve sección nos proponemos practicar como se calcula un porcentaje utilizando la llamada “regla de tres” y también multiplicando por un n° decimal. Para ello veamos algunos ejemplos:

Calcular el 25% de 300

Regla de tres simple:

100%________300

25%__________$25\cdot 300:100=\frac{25\cdot 300}{100}=\mathbf{75}$

Multiplicando por un número decimal: Para ello observemos que, por ejemplo:

$$\frac{25\cdot 300}{100}=\frac{25}{100}\cdot 300=\mathbf{0,25}\cdot 300=\mathbf{75}$$

En general,
15% de 90: $\mathbf{0,15}\cdot 90=13{,}5$
17% de 84: $\mathbf{0,17}\cdot 84=14{,}28$

120% de 80: $\mathbf{1{,}20} \cdot 80 = 96$
Etc.

Otro ejemplo,
¿Qué porcentaje representa el número 150 con respecto a 750?
$75\_\_\_\_\_\_100\%$
$150\_\_\_\_\_150 \cdot 100 \ / \ 750 = \frac{150 \cdot 100}{750} = \mathbf{20}\%$
Otra manera de pensarlo es que busquemos

$$\frac{150}{750} \cdot 100 = \mathbf{20}\%$$

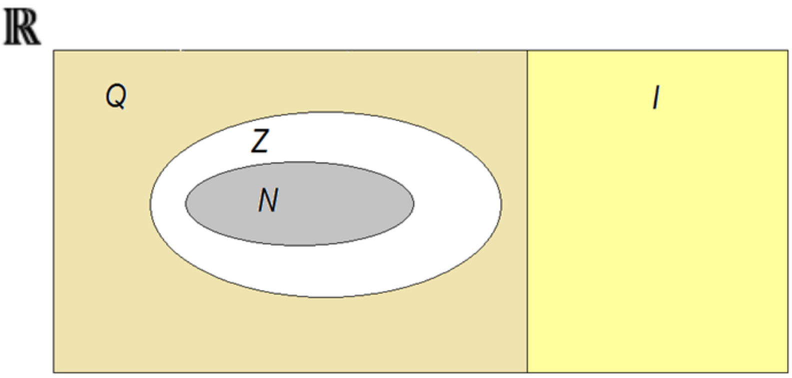
Números irracionales, y números reales

Irracionales

El conjunto de números **irracionales** (al que se los simboliza con la letra **“I”)** está formado por aquellos números que son **imposible** de escribirlos como fracción, o sea, no son racionales pues **no es posible** expresarlos como **cociente de dos números enteros**.
Algunos números que está probado que son irracionales son:
* Los resultados de las raíces cuadradas de números primos, como $\sqrt{2}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{19}$, etc.
* El número $\boldsymbol{\pi}$ que nos sirve en la fórmula de cálculo de la medida de la circunferencia.
* El llamado “número neperiano”, que se simboliza con la letra “e”.

Reales

El conjunto de los números racionales, junto con el conjunto de los números irracionales, forman el llamado conjunto de los **números reales**, al cual se lo simboliza con la letra $\mathbb{R}$.
De esta manera **todos** los números que pueden aparecer en nuestra vida cotidiana pertenecen siempre a algunos de los conjuntos que hemos descripto, y cuando nos referimos a “*los reales*”, nos estamos refiriendo a *cualquier número*.



Intervalos en la recta real

A partir de la relación de orden definida en los números reales pueden definirse conjuntos de números denominados ***intervalos.***

Cuando trabajamos con los reales, es muy útil hacer uso de los siguientes **símbolos al realizar comparaciones**.

Notación	***Se lee:***	***Ejemplos***
$a < b$	"a es **menor** que b"	$3 < 5;\quad -2 < 5$
$a \leq b$	"a es **menor ó igual** que b"	$3 \leq 5;\quad 3 \leq 3$
$a > b$	"a es **mayor que** b"	$5 > 3;\quad 5 > -2$
$a \geq b$	"a es **mayor o igual que** b"	$5 \geq 3;\quad 5 \geq 5$

Dados entonces dos números reales ***a*** y ***b tales que, a < b****, vamos a utilizar la siguiente notación para definir los* siguientes subconjuntos en los reales**:**

- ***Intervalo cerrado [a; b]:*** es el conjunto de números reales que verifican simultáneamente ser mayores o iguales que **a;** y menores o iguales que **b**. Los extremos **pertenecen** al conjunto.
- ***Intervalo abierto (a; b):*** es el conjunto de números reales que verifican simultáneamente ser mayores que **a;** y menores que **b**. Los extremos **no pertenecen** al conjunto.
- ***Intervalo semiabierto o semicerrado o mixto:*** son combinaciones de los anteriores.

Tipo de Intervalo	Notación de Intervalo	Notación de desigualdad	Grafica Lineal
INTERVALO ABIERTO	$(a ; b)$	$a < x < b$	
INTERVALO CERRADO	$[a ; b]$	$a \leq x \leq b$	
INTERVALO SEMI-ABIERTO POR LA IZQUIERDA	$(a ; b]$	$a < x \leq b$	
INTERVALO SEMI-ABIERTO POR LA DERECHA	$[a ; b)$	$a \leq x < b$	

Ejemplos,

$[3;\ 5]$ Números mayores o iguales a 3 y menores o iguales a 5. $\quad 3 \leq x \leq 5$

$(3;\ 5)$ Números mayores a 3 y menores que 5. $\quad 3 < x < 5$

$[3;\ 5)$ Números mayores o iguales a 3 y menores que 5. $\quad 3 \leq x < 5$

$(-\infty\ ;\ 5]$ Números menores o iguales a 5. $\quad x \leq 5$

$(3;\ +\infty)$ Números mayores a 3. $\quad 3 < x$

Ecuaciones e inecuaciones

Ecuaciones

En matemática es habitual trabajar con relaciones numéricas en las que una o más cantidades son desconocidas. Estas cantidades se denominan **incógnitas** o **variables** y se representan por letras.
Aquellas expresiones en las que intervienen números y letras, vinculadas mediante operaciones aritméticas se denominan **expresiones algebraicas.**
Al traducir un cierto enunciado al lenguaje simbólico se obtienen expresiones algebraicas. Ejemplos:

Lenguaje coloquial	Expresión algebraica
La suma entre un número natural y su consecutivo	$\boldsymbol{n+(n+1)}$
El precio de un artículo aumentado en un 15%	$\boldsymbol{x+\frac{15}{100}x}$
El cuadrado de la diferencia entre a y b es 16	$\boldsymbol{(a-b)^2=16}$
El área A de un rectángulo cuya base es el doble de la altura	$\boldsymbol{A=h.2h=2h^2}$

Con las expresiones algebraicas se pueden realizar las mismas operaciones que con los números reales, lo que hace posible reducirlas a expresiones más sencillas que son equivalentes.
Ejemplos,

- $(4m+3m)\cdot 2 \;=\; 8m+6m$
- $4x^2 - \; x^2 = 3x^2$
- $a\cdot b \;+\; a\cdot c \;=\; a\cdot(b+c)$

Vamos a ver como las expresiones algebraicas nos permiten resolver problemas de aplicación.

Ejemplo,

Supongamos que la empresa de teléfonos "*Fono S.A*." calcula el abono mensual de la siguiente manera: *$3 por cada llamada realizada más un cargo fijo de $ 850*. Es decir,

=> Si hice 10 llamadas, me cobra $3\cdot 10+850=880\ pesos$

=> Si hice 30 llamadas, me cobra $3\cdot 30+850=940\ pesos$

* Si en el mes tuve que pagar $1090 ¿Cuántas llamadas hice?

Primero vamos a razonarlo de manera sencilla: en los 1090 que pagué está sumado el costo fijo más los que pagué por las llamadas que hice. Obtengamos primero lo que realmente gasté en llamadas, restando a 1090 el abono fijo de $850:

$1090 - 850 = 240$ => estos $240 es lo que pagué en sí por las llamadas que hice. Por lo tanto, dado que cada llamada sale 3 pesos, la cantidad de llamadas que realicé la obtengo calculando:

$$240 : 3 = \frac{240}{3} = \boldsymbol{80\ llamadas}$$

Ya obtuvimos la solución, pero probemos ahora de volver a calcular lo mismo buscando representar el problema mediante una expresión algebraica y hallando la incógnita siguiendo las reglas sobre cómo resolver una ecuación.

Mi incógnita es la *"cantidad de llamadas que realicé en el mes"*, a la cual simbolizaremos con la letra x, quiere decir que "*$3 por cada llamada realizada más un cargo fijo de $ 850"* lo puedo simbolizar como $\boldsymbol{3x + 850} = \boldsymbol{costo\ mensual\ en\ pesos}$

Si me cobraron 1090 quiere decir entonces que

$$3x + 850 = 1090$$

Vamos a despejar la x utilizando para ello las reglas sobre como resolver una ecuación (luego las veremos más formalmente y con más ejemplos)

Esas reglas dicen que, ante una ecuación o igualdad, todo lo que está sumando debe pasar restando al miembro opuesto de la ecuación (y viceversa)

$$3x = 1090 - 850$$

$$3x = 240$$

Y también dicen que todo lo que está multiplicando, debe pasar dividiendo (y viceversa).

$$x = \frac{240}{3} = \boldsymbol{80}$$

Y así, llegamos a la misma solución que antes.

(En este ejemplo tan sencillo, el haber utilizado el lenguaje simbólico nos complicó la resolución, pero en casos más complicados es todo lo contrario).

Supongamos ahora que **otra** compañía, llamada "*Bell*", cobra *$5 la llamada, pero solo 750 de abono fijo*. O sea que ahora, si *x*= *cantidad de llamadas realizadas, entonces*

$$\boldsymbol{5x + 750 = costo\ mensual\ en\ pesos}$$

Si hago pocas llamadas en el mes, me conviene esta compañía, que me cobra poco por el abono.

*¿Para cuál valor de x vamos a pagar exactamente lo mismo con ambas empresas? Ese sería el valor límite: si hago más llamadas, me resultará más barato Fono S.A., que me cobra poco por llamada, que Bell, que cobra poco abono, pero mucho por cada llamada.

Busco x tal que:

$$3x + 850 = 5x + 750$$

Tratemos de operar de modo de agrupar todos los términos en que **no figuren la incógnita x de un lado de la igualdad,** y dejar a **los que sí la tienen**, en el **lado opuesto** de la igualdad:

$$3x + 850 - 750 = 5x$$

$$3x + 100 = 5x$$

$$100 = 5x - 3x$$

$$100 = 2x$$

$$\frac{100}{2} = \frac{2x}{2}$$

$$\frac{100}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}}$$

$$\frac{100}{2} = x$$

$$\mathbf{50} = x$$

Comprobemos, por las dudas, que el resultado esté bien:

Fono: $3 \cdot \mathbf{50} + 850 = 150 + 850 = 1000$

Bell: 5· $\mathbf{50} + 750 = 250 + 750 = 1000$

Veamos otro ejemplo,

* Al doble de haberle sumado a un número entero su consecutivo da 82 ¿Cuánto vale dicho entero?

El “consecutivo” de un entero es el entero inmediato, o sea, el mismo número más uno.

$$7 \rightarrow 8$$
$$-4 \rightarrow -3$$

En general:

$$N \rightarrow N + 1$$

¿Cómo representamos al “doble de haberle sumado a un número entero su consecutivo”?

“suma de un número entero más su consecutivo”: $N + (N + 1) = N + N + 1$

“doble de la suma…”

$$2\,(N + N + 1)$$

Queremos hallar el N que cumple que $2\,(N + N + 1) = 82$

Veamos dos maneras de hacerlo:

$$2\,(N + N + 1) = 82$$
$$2(2N + 1) = 82$$
$$4N + 2 = 82$$
$$4N = 82 - 2$$
$$4N = 80$$

$$N = \frac{80}{4} = \mathbf{20}$$

En efecto: $2(20 + 21) = 2(41) = 82$

Otra manera de hacerlo:

$$2(N + N + 1) = 82$$
$$2(2N + 1) = 82$$
$$2N + 1 = \frac{82}{2} \text{ (el paréntesis lo quité porque es ocioso)}$$
$$2N + 1 = 41$$
$$2N = 41 - 1$$
$$2N = 40$$
$$N = \mathbf{20}$$

Vamos ahora a formalizar más los conceptos que hemos visto en ambos ejemplos. Supongamos estar resolviendo un problema que quedó representado por la siguiente ecuación, donde "t" es la incógnita:

$$-8(t - 4) = 2t + 42$$

Vamos entonces, aplicando las operaciones matemáticas, a hallar la incógnita "t", o sea, a resolver la ecuación.

$$-8t + 32 = 2t + 42$$
$$-8t - 2t = 42 - 32$$
$$-10t = 10$$
$$t = \frac{10}{-10} = -1$$

En efecto, si reemplazo por $t = -1$ en $-8(t - 4)$, obtengo: $-8(-1 - 4) = -8\,(-5) = 40$

Si reemplazo por $t = -1$ en $2t + 42$ me queda: $2(-1) + 42 = -2 + 42 = 40$

Otro ejemplo,

* Hallar el valor de x que cumple que:

$$4\left(\frac{3}{2} - \frac{2x}{5}\right) = -2(x - 5)$$

Solución:

Probemos operando primero dentro de los paréntesis:

$$4\left(\frac{15 - 4x}{10}\right) = -2(x - 5)$$
$$\frac{4}{1}\left(\frac{15 - 4x}{10}\right) = -2x + 10$$
$$\frac{60 - 16x}{10} = -2x + 10$$

Pasemos el 10 que está dividiendo al otro miembro de la igualdad multiplicando. ¡Ojo, el 10 tiene que multiplicar a TODO lo que está a la derecha, por eso ponemos paréntesis!

$$60 - 16x = 10\,(-2x + 10)$$
$$60 - 16x = -20x + 100$$
$$-16x + 20x = 100 - 60$$

$$4x = 40$$
$$x = \frac{40}{4} = \mathbf{10}$$

Verifiquemos si está bien la respuesta obtenida reemplazando por $x = 10$ a ambos lados de la igualdad original:

$$4\left(\frac{15 - 4x}{10}\right) = -2(x - 5)$$

En efecto:

$$4\left(\frac{15 - 4 \cdot 10}{10}\right) = 4\left(\frac{15 - 40}{10}\right) = 4\left(\frac{-25}{10}\right) = \frac{-100}{10} = -10$$
$$-2(10 - 5) = -2 \cdot 5 = -10$$

Situaciones particulares

Importante…supongamos querer resolver:

$$3x - 1 = \frac{3}{2}(2x - 1)$$
$$3x - 1 = 3x - \frac{3}{2}$$
$$3x - 3x - 1 = \frac{3}{2}$$
$$-1 = \frac{3}{2} \quad ¿!? \ \boldsymbol{Absurdo} \ldots$$

¿Qué significa esto, que concluimos?

Cuando llegamos a un absurdo decimos que el sistema es ***incompatible***, **NO hay solución**, o sea, **no hay valor de x que resuelva la ecuación**.

Se dice entonces que el conjunto de soluciones es "vacío", y anotamos:

$$\boldsymbol{S} = \emptyset \quad (en\ matemáticas\ "\emptyset"\ significa\ \text{"conjunto vacío"})$$

Otro ejemplo "raro":

$$4x + 8\left(-\frac{x}{2} + 1\right) = 8$$
$$4x - \frac{8x}{2} + 8 = 8$$
$$4x - \frac{8x}{2} = 8 - 8$$
$$4x - 4x = 0$$
$$0 = 0 \quad ¡\boldsymbol{Esto\ es\ siempre\ cierto}!\ ¿Pero\ entonces \ldots?$$

"***Sistema indeterminado***": **<u>cualquier valor de x</u> cumple con la ecuación pedida**, por lo tanto, escribiremos que el conjunto solución es

$$\boldsymbol{S} = \mathbb{R}$$

> ***Revisando los resultados de cada una de las ecuaciones planteadas, se observa que una ecuación lineal de primer grado con una incógnita puede entonces:***
>
> - ***tener una única solución,***
> - ***no tener solución,***
> - ***tener infinitas soluciones.***

<u>Inecuaciones</u>

Vamos a ver ahora como hallar la solución cuando tenemos dos expresiones algebraicas que, en vez de estar igualadas, están separadas por una desigualdad.

<u>Ejemplo</u> ¿Qué números reales cumplen que su triplo es mayor que ese número más 10 unidades?

$$3x > x + 10$$
$$3x - x > 10$$
$$2x > 10$$
$$x > \frac{10}{2}$$
$$\boldsymbol{x > 5}$$

Podemos escribirlo como intervalo:

$\boldsymbol{x} \in (\mathbf{5}; +\infty)$ (o si prefieren: la solución es el intervalo $(5; +\infty)$)

Abierto en el "5", porque el 5 no cumple la desigualdad estricta, si hubiera sido $x \geq 5$ escribíamos $x \in [5; +\infty)$

<u>¡Atención!</u> una observación importante. Notemos lo siguiente,

$$5 > 3$$
$$y \ \ si\ multiplico\ por\ 2\ a\ ambos\ lados, es$$
$$2 \cdot 5 = \mathbf{10} > \mathbf{6} = 2 \cdot 3$$
$$pero\ si\ multiplicaba\ por\ -2\ a\ ambos\ lados$$
$$-2 \cdot 5 = \mathbf{-10} < \mathbf{-6} = -2 \cdot 3$$

Es decir, si multiplicamos por el número negativo -2, la desigualdad se invierte.

Otro ejemplo:

$$-3 > -7$$

$$pero\ si\ multiplico\ por (-5)\ a\ ambos\ lados$$
$$-3 \cdot (-5) = \mathbf{15} \ < \mathbf{35} = \ -7 \cdot (-5)$$

Otro ejemplo más…

$$10 > 6$$
$$si\ divido\ por\ 2\ a\ ambos\ lados\ es\ \frac{10}{2} = \mathbf{5} > \ \mathbf{3} = \frac{6}{2}$$
$$pero\ si\ divido\ por\ (-2)\ a\ ambos\ lados\ es$$
$$\frac{10}{-2} = -\mathbf{5} < -\mathbf{3} = \frac{6}{-2}$$

Propiedad de las inecuaciones

Cuando se **multiplica** **o** **divide** por un número **negativo,** el símbolo de la **desigualdad debe invertirse:**

Si $c < 0$		
$a < b$	$a \cdot c > b \cdot c$	$\frac{a}{c} > \frac{b}{c}$
$a > b$	$a \cdot c < b \cdot c$	$\frac{a}{c} < \frac{b}{c}$
$a \leq b$	$a \cdot c \geq b \cdot c$	$\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$
$a \geq b$	$a \cdot c \leq b \cdot c$	$\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$

Ejemplo:

$$-4x \leq 20$$

Si pasamos el -4 al otro miembro, estaríamos dividiendo por un negativo, entonces debemos dar vuelta el símbolo de la desigualdad.

$$\frac{-4x}{-4} \geq \frac{20}{-4}$$
$$x \geq \frac{20}{-4}$$
$$Con\ lo\ cual:$$
$$x \geq -5$$

Otra manera hubiera sido resolverlo sin realizar la división (y nos evitamos andar dando vuelta el símbolo):

$$-4x \leq 20 \Rightarrow 0 \leq 20 + 4x \ \Rightarrow \ -20 \leq 4x \ \Rightarrow \ \frac{-20}{4} \leq x \ \Rightarrow \ -5 \leq x$$

Ejemplo:

Hallar el valor de x que cumple que:

$$-2x \leq 6x + 4$$

Veamos dos maneras de resolverlo:

$$x \geq \frac{6x+4}{-2}$$
$$x \geq \frac{6x}{-2} + \frac{4}{-2}$$
$$x \geq -3x - 2$$
$$x + 3x \geq -2$$
$$4x \geq -2$$
$$x \geq \frac{-2}{4} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Respuesta: $\boldsymbol{x} \in [-\frac{1}{2}; +\infty)$

La otra manera (**y más simple**…),

$$-2x \leq 6x + 4$$
$$-2x - 6x \leq 4$$
$$-8x \leq 4$$
$$x \geq \frac{4}{-8} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2}$$

Sistemas de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas.

Consideremos el siguiente problema: en una librería alguien pagó en total $100 por la compra de un cuaderno y 5 biromes. Otra abonó $220 al comprar 4 cuadernos y 2 biromes ¿Cuánto sale cada cuaderno y cada birome?

Notemos que tenemos no una, sino **dos incógnitas**: el precio del cuaderno y el precio del cuaderno.

C = precio de un cuaderno.

B = precio de una birome.

Vamos entonces a expresar algebraicamente el resultado mediante dos ecuaciones lineales con las dos incógnitas (a esto se lo llama **sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas)**,

$$\begin{cases} C + 5B = 100 & (\text{ \$100 un cuaderno y 5 biromes}) \\ \\ 4C + 2B = 220 & (\text{ \$220 4 cuadernos y 2 biromes}) \end{cases}$$

Veamos una de las tantas otras maneras de resolverlo:

Método de sustitución

1°) Consideremos cualquiera de las dos ecuaciones, por ejemplo, la primera, y despejemos de ella una cualquiera de las dos variables, por ejemplo, la C:

$$C = 100 - 5B$$

2°) Consideremos la otra ecuación y reemplacemos en ella la variable que despejamos en la primera:

$4C + 2B = 220$ => $4\,(100 - 5B) + 2B = 220$

3°) Resolvemos la ecuación de una variable que nos quedó en el paso 2°)

$$4(100 - 5B) + 2B = 220$$

$$400 - 20B + 2B = 220$$

$$-18B = 220 - 400$$

$$-18B = -180$$

$$B = \frac{-180}{-18} = \mathbf{10}$$

4°) Volvemos al paso 1°) y calculamos el valor de la otra incógnita:

$C = 100 - 5B$ => $C = 100 - 5 \cdot \mathbf{10}$ => $C = 100 - 50 = \mathbf{50}$

Podemos, por las dudas, comprobar si hicimos las cosas bien verificando que ambas ecuaciones se cumplen:

$$\begin{cases} C + 5B = 100 \\ 4C + 2B = 220 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{50} + 5 \cdot \mathbf{10} = 100 \\ 4 \cdot \mathbf{50} + 2 \cdot \mathbf{10} = 220 \end{cases}$$

Otro ejemplo:

Hallar los valores de x y de y que cumplen con estas ecuaciones:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 8y = 80 \end{cases}$$

1°) Primero tomamos una ecuación y despejamos una de las variables:

$$3x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 3x \Rightarrow y = \frac{5 - 3x}{2}$$

2°) Luego tomamos la otra ecuación y sustituimos la variable que acabamos de despejar.

$$6x + 8 \cdot y = 80 \quad \Rightarrow$$

$$6x + 8\left(\frac{5 - 3x}{2}\right) = 80$$

3°) Resolvemos la ecuación que nos quedó:

$$\Rightarrow 6x + \frac{40 - 24x}{2} = 80$$

$$\Rightarrow 6x + 20 - 12x = 80$$

$$\Rightarrow \; -6x + 20 = 80 \; \Rightarrow \; -6x = 60 \; \Rightarrow \boldsymbol{x} = \frac{60}{-6} = \mathbf{-10}$$

4°) Volvemos al primer paso y deducimos el valor de la otra variable:

$$\boldsymbol{y} = \frac{5-3x}{2} \Rightarrow y = \frac{5-3\cdot(-10)}{2} = \frac{5+30}{2} = \frac{35}{2}$$

Veamos otra manera de resolverlo…

Método de igualación:

$$\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 6x + 8y = 80 \end{cases}$$

1°) Lo mismo que antes: primero tomamos una ecuación y despejamos una de las variables:

$$3x + 2y = 5 \Rightarrow 2y = 5 - 3x \Rightarrow y = \frac{5-3x}{2}$$

2°) Hagamos lo mismo con la otra ecuación, despejando la misma variable:

$$6x + 8y = 80 \quad \Rightarrow$$

$$8y = 80 - 6x$$

$$y = \frac{80 - 6x}{8}$$

3°) Igualamos los dos despejes de los pasos anteriores y despejamos la variable que nos queda:

$$\frac{5-3x}{2} = \frac{80-6x}{8}$$

$$\Rightarrow 8\,(5-3x) = 2\,(80-6x)$$

$$40 - 24x = 160 - 12x$$

$$-24x + 12x = 160 - 40$$

$$-12x = 120$$

$$x = \mathbf{-10}$$

4°) Vamos a cualquiera de las dos ecuaciones del paso 1°) y encontramos el valor de la otra variable:

$$\boldsymbol{y} = \frac{5-3x}{2}$$

$$\Rightarrow y = \frac{5-3\cdot(-10)}{2} = \frac{5+30}{2} = \mathbf{\frac{35}{2}}$$